

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

www.joom.org.mx

Ciudad de México, México. No. 2. Enero-Junio 2020

OBJETOS MATEMÁTICOS:

- **Breve apunte sobre los espacios compactos y espacios métricos en Topología.**
Francisco Guillermo Herrera Armendia.

OBJETIVOS MATEMÁTICOS:

- **Evaluación de alternativas QFD con resultados inciertos por medio de análisis de decisiones.**
Leopoldo Viveros Rosas, Marco Ivan Rivera Bazan; Rebeca Díaz Téllez, Mario Luis Chew Hernández y José Roberto Pérez Torres.
- **APP y diccionario matemático en LSM para el aprendizaje de la Geometría para escuelas secundarias inclusivas.**
Eicka Viana Huihuitoa y Marcos Fajardo Rendón.
- **Cálculo combinatorio en la enseñanza de las matemáticas.**
Nayeli Lopez Tails
- **Una alternativa para el trazo de los diez primeros polígonos regulares inscritos en una circunferencia a través de fórmulas deductivas.**
Jaime William Flores Tecalco.

Francisco Guillermo Herrera Armendia
Editor en Jefe.
herrera@joom.org.mx

Marcos Fajardo Rendón
Editor Ejecutivo.
fajardo@joom.org.mx
Isaac Villavicencio Gómez
Coordinador Editorial.
villavicencio@joom.org.mx

CONSEJO PERIODISTA

Efraín Valencia Calzadilla
Sealtiel Pichardo Jiménez
Gregorio Montes de Oca Godínez
Areli Guadalupe Mateos Sanchez

COMITÉ CIENTÍFICO

Vitaliano Acevedo Silva
Marleny Hernández Escobar
Enrique Salazar Peña
María de Jesús Sentiés Nacaspac
Raciel Trejo Reséndiz

PRODUCCIÓN

Francisco Guillermo Herrera Armendia, Marcos Fajardo Rendón e Isaac Villavicencio Gómez

Webmaster
Marcos Fajardo Rendón

Web Designer
Juan Carlos Olivo Moya

JOURNAL DE OBJETOS Y OBJETIVOS MATEMÁTICOS, No. 2, Enero-Junio 2020, es una Publicación semestral editada por Francisco Guillermo Herrera Armendia con domicilio en Av. Zarzaparrillas 201 casa 12-A, Col. los Héroes Coacalco, Coacalco de Berriozabal, Estado de México, C.P. 55712, www.joom.org.mx, revistajoom@gmail.com.
Editor responsable: Francisco Guillermo Herrera Armendia.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2019-103016243300-203 otorgado por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor, ISSN 2683-264X.
Responsable de la última actualización de este Número, Marcos Fajardo Rendón con domicilio Pedro Mz. 10 Bis Lt 12-A; La Purísima, Ecatepec, Estado de México, C.P. 5031, fecha de la última modificación 01 de junio de 2020.

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

Número 2

Enero-Junio de 2020

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos es una revista semestral revisada por pares de Acceso Abierto que publica artículos de investigación originales, así como ensayos teóricos en todos los aspectos de los objetos de las matemáticas puras y aplicadas.

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos es una literatura de Acceso Abierto bajo la BOAI (Budapest Open Access Initiative) y el modelo Open Access, lo que significa la disponibilidad de acceso libre mediante Internet al público, permitiendo a cualquier usuario su lectura, descarga, copia, distribución, impresión, almacenamiento, búsqueda, digitalización o vínculo a los textos completos de estos artículos para su rastreo e indexado; sin necesidad de compensación financiera, legal o algún otro tipo.

La presentación y disposición en conjunto de cada página de *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* núm. 2, enero-junio de 2020, son propiedad de sus respectivos autores. En cada artículo publicado los autores conservan los derechos de autoría de su trabajo, pero los lectores son libres de reutilizar el material siempre y cuando se den las citas correspondientes adecuadamente, no sea modificado ni usado con fines comerciales; ya que todos los artículos se publican bajo la licencia de atribución Creative Commons (CC BY-NC-ND).

Las opiniones expresadas por los autores en *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* no necesariamente reflejan la postura de los editores de la publicación.

Contenido

Carta del Editor	3
 OBJETOS MATEMÁTICOS	
Breve apunte sobre los espacios compactos y espacios métricos en Topología.	6
Brief note on compact spaces and metric spaces in Topology. <i>Francisco Guillermo Herrera Armendia</i>	
 OBJETIVOS MATEMÁTICOS	
Evaluación de alternativas QFD con resultados inciertos por medio de análisis de decisiones.	9
Evaluation of QFD alternatives with uncertain results through decision analysis. <i>Leopoldo Viveros Rosas, Marco Ivan Rivera Bazan; Rebeca Díaz Téllez, Mario Luis Chew Hernández y José Roberto Pérez Torres.</i>	
APP y diccionario matemático en LSM para el aprendizaje de la Geometría para escuelas secundarias inclusivas.	17
APP and LSM mathematical dictionary to learn Geometry for inclusive elementary schools. <i>Eicka Viana Huihuitoa y Marcos Fajardo Rendón.</i>	
Cálculo combinatorio en la enseñanza de las matemáticas	21
Combinatorial calculus in mathematics teaching. <i>Nayeli López Tails.</i>	
Una alternativa para el trazo de los diez primeros polígonos regulares inscritos en una circunferencia a través de fórmulas deductivas.	32
An alternative for tracing the first ten regular polygons inscribed on a circle using deductive formulas. <i>Jaime William Flores Tecalco.</i>	

CARTA DEL EDITOR

En este segundo número incluimos un breve apunte sobre algunas propiedades importantes en topología, que permiten abordar el concepto de espacio de Hausdorff, y que este año se celebra el 152 aniversario de nacimiento. En la sección de Objetivos Matemáticos contamos con la aportación de un grupo de investigadores del TECN y TESCO relativo a la Teoría de Decisiones y una interesante aportación inclusiva con TIC realizada en nuestra casa de estudios y aportaciones relacionadas con el proceso de enseñanza – aprendizaje áulico y con instrumentos originales.

Ofrecemos además, el listado onomástico de investigadores en el área de la matemática, con la particularidad de que la secuencia del nombre de los días de los años mencionados es exactamente la misma que la secuencia del nombre de los días de este 2020.

Esto permite plantear la siguiente pregunta: ¿cuál es el valor numérico que representa la probabilidad de que una persona nazca en un día muy especial de un año bisiesto, dedique su vida al quehacer matemático, fallezca en un año bisiesto y que además ambos años bisiestos tengan la misma secuencia en el nombre de los días de la semana? Hay muchos más años que tienen esta secuencia calendárica, pero no son bisiestos, es decir, que coinciden sólo a partir del 1 de marzo, por eso no los incluimos.

El domingo 12 de enero de 1936 nace Miguel de Guzmán, matemático español cuya obra destaca principalmente en la educación y la divulgación de la matemática, Autor de diversos libros de texto de temas importantes en la matemática.

El miércoles 22 de enero de 1592 nace Pierre Gassendi, filósofo, científico y matemático. Además de ser el primer científico registrado en observar el tránsito de Venus, su obra matemática se distingue en el aspecto filosófico. Interactuó mucho con Mersenne.

El viernes 31 de enero de 1896 nace Sofya Yanovskaya, matemática rusa cuyas aportaciones incluyen buenos trabajos en la filosofía de la matemática y de la lógica, entre otros.

El domingo 2 de febrero de 1896 nace Kazimierz Kuratowski, matemático polaco y sus principales contribuciones en el área matemática se enfocan en la Topología y la teoría de Conjuntos, además de contribuir también en investigaciones relacionadas con espacios compactos y espacios métricos. También realizó importantes contribuciones al a Teoría de Grafos.

El miércoles 12 de febrero de 1908 nace Jacques Herbrand, matemático francés cuyas principales contribuciones se centran en la teoría de clase de campos.

El jueves 13 de febrero de 1992 fallece Nikolái Bogoliúbov, matemático ruso-ucraniano. Sus aportaciones se enfocan en la física matemática con la denominada transformación de Bogoliúbov identificada como un isomorfismo de las álgebras de relaciones de conmutación y anticonmutación canónicas y cuya aplicación se dirige a la diagonalización de hamiltonianos con el propósito de brindar una solución estacionaria a la ecuación de Schrödinger.

El viernes 14 de febrero de 1744 fallece John Hadley, matemático y astrónomo británico y que realizó importantes contribuciones en astronomía.

El domingo 16 de febrero de 1992 fallece Herman Wold, matemático sueco. Se dedicó a la estadística matemática pues contribuye al desarrollo del Teorema Cramer-Wold que caracteriza la distribución normal. En economía contribuyó al desarrollo de la Teoría de la Utilidad y a la Teoría de la Demanda del Consumidor. También aporta avances al desarrollo del método de los mínimos cuadrados parciales (PLS) por sus siglas en inglés, entre otras obras de importancia.

El domingo 15 de marzo de 1868 nace Grace Chisholm Young, matemática inglesa. Asistió a la prestigiosa Universidad de Gotinga en la que trabajó sobre la ecuación que determina la trayectoria cometaria. Como estudiante de Félix Klein publicó varios artículos de investigación relacionados con la teoría de funciones de una variable real y el ensayo sobre derivadas infinitas con el que fue galardonada.

El domingo 29 de marzo de 1772 fallece Emanuel Swedenborg, filósofo y matemático sueco quien escribió “El inventor del Norte, o nuevos experimentos en matemáticas y física”.

El domingo 29 de marzo de 1896 nace Wilhelm Ackermann, matemático alemán con importantes contribuciones en lógica matemática y la Teoría de Conjuntos.

El miércoles 22 de abril de 1592 nace Wilhelm Schickard, matemático alemán, creador de la primera máquina de calcular que facilitaron mucho sus cálculos astronómicos, al apoyarse en esta tecnología que ahorra mucho tiempo en las laboriosas operaciones aritméticas. También hizo importantes contribuciones a la astronomía.

El lunes 27 de abril de 1936 fallece Karl Pearson, matemático y académico británico, sus aportaciones principales se enfocan a la estadística aplicada a los aspectos de la herencia y la evolución biológicas.

El martes 28 de abril de 1868 nace Georgy Voronoi, matemático ruso. Realizó importantes aportaciones a la matemática pura como es el caso de la teoría general de enteros algebraicos, con el caso particular de números que dependen de la raíz de una ecuación irreducible de la forma $r^3 = rx + s$; además aportó la idea que hoy se conoce como el diagrama de Voronoi.

El 28 de mayo de 1676 nace Jacopo Francesco Riccati, matemático italiano. Además de escribir tópicos relacionados con filosofía y física su aportación a la rama matemática se centra en las ecuaciones diferenciales, por ejemplo su método para la separación de indeterminantes en algunas de ellas, trabajó arduamente en las ecuaciones que se pueden integrar con transformaciones algebraicas adecuadas, a diferencia de aquellas que requieren el cambio de variable

El martes 25 de agosto de 1964 nace Maxim Kontsevich, matemático ruso. Entre sus aportaciones, destaca una de las más completas descripciones sobre la prueba de una conjetura propuesta por E. Witten, relativa al cálculo de la intersección de números de clases estables, idea introducida por Mumford que involucra la compactación de espacios modulares de curvas algebraicas g -genus con puntos marcados.

El miércoles 26 de agosto de 1964 fallece Sixto Cámara Tecedor, matemático español. Sus principales aportaciones a la matemática se centran en la Geometría Sintética, Geometría Analítica, Estadística y en el campo de la física en la balística.

El viernes 28 de agosto de 1744 nace Agustín de Pedrayes, matemático español que en el último tercio del siglo XVIII propuso un método para la solución de ecuaciones. El martes 1 de septiembre de 1648 fallece Marin Mersenne, matemático francés que dedicó gran esfuerzo al estudio de lo que hoy se conoce como la Teoría de Números. Hoy su trabajo se conoce como los números primos de Mersenne, de la forma $2^n - 1$; p, n números primos; cumple para $p=2,3,5,7,13,17,19,31,67,127,257$, pero no para los otros 44 números primos p menores que 257. En la actualidad sigue siendo de interés esta forma numérica.

El lunes 7 de septiembre de 1936 fallece Marcel Grossmann, matemático húngaro; entre sus principales trabajos resalta la colaboración que tuvo con A. Einstein al publicar un trabajo sobre la Teoría de la Gravitación y que es uno de los fundamentos de la Teoría de la Relatividad. También destaca su aportación a la Geometría Descriptiva.

El sábado 26 de septiembre de 1868 fallece August Möbius, matemático y astrónomo alemán con numerosas contribuciones a la matemática, por ejemplo la Teoría Geométrica de los Poliedros.

El martes 6 de octubre de 1908 nace Serguéi Sóbolev, matemático ruso. Entre sus aportaciones, destaca su propuesta sobre el método variacional estándar para la solución de problemas de valor límite elípticos, la función de espacios de Sóbolev. Publicó en 1950 el afamado texto denominado “Aplicaciones del análisis funcional a la física matemática”, en lengua rusa.

El viernes 23 de octubre de 1908 nace Iliá Frank, físico y matemático soviético, premio nobel de física en 1958. Aunque sus contribuciones se centran en el área de la física, realizó un importante trabajo con relación a la explicación teórica (en lenguaje matemático) acerca del fenómeno relacionado con el desplazamiento de partículas cargadas en un medio transparente y a velocidades mayores que la de la luz.

El domingo 8 de noviembre de 1868 nace Felix Hausdorff, matemático alemán quien realizó importantes contribuciones a la Teoría de la Medida.

El sábado 14 de noviembre de 1716 fallece el filósofo y matemático alemán Gottfried Leibniz cuyas aportaciones en matemáticas son muy conocidas, además de ser fundamentales.

El viernes 20 de noviembre de 1908 fallece Georgy Voronoi, matemático ruso. Algo de su aportación la mencionamos en la fecha correspondiente al 28 de abril. Como dato curioso, nace y fallece en años con secuencia calendárica idéntica.

El viernes 25 de diciembre de 1908 nace el matemático sueco Herman Wold cuya obra destacamos en el onomástico de su fallecimiento, y como dato curioso nace y fallece en años con idéntica secuencia calendárica.

El listado abarca un ciclo y algunos años más del calendario salamantino (Carabias Torres, Ana María. (2012) Salamanca y la Medida del Tiempo. Ediciones Universidad de Salamanca), popularmente conocido como calendario gregoriano. Este ciclo es de 400 años y fue todo un trabajo matemático su elaboración.

Referencias de Apoyo:

Enciclopedia Británica, Edición 1981.

Referencias digitales:

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/>

<https://efemerides20.com/>

Los editores.

Breve apunte sobre los espacios compactos y espacios métricos en Topología.

Francisco Guillermo Herrera Armendia.

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco,
02420 CDMX, México.
harmendia@gmail.com

Resumen- En esta ocasión describo algunas propiedades de la topología general que son fundamentales para iniciar el estudio de esta rama de la matemática moderna, desde el punto de vista axiomático. En algunos casos ofrezco la prueba de los enunciados que describen estas propiedades para tratar el concepto de filtro en los espacios topológicos. Hago énfasis en el concepto de espacios compactos, debido a la importancia que posee.

Palabras Clave- espacios topológicos, espacios compactos, filtros, teorema Heine-Borel.

Zusammenfassung- Dieses Mal beschreibe ich einige Eigenschaften der allgemeinen Topologie, die grundlegend sind, um das Studium dieses Zweigs der modernen Mathematik unter axiomatischen Gesichtspunkten zu beginnen. In einigen Fällen biete ich einen Beweis für die Aussagen, die diese Eigenschaften beschreiben, um das Konzept des Filters in topologischen Räumen zu behandeln. Ich betone das Konzept der kompakten Räume aufgrund seiner Bedeutung.

Schlüsselwörter - topologische Räume, kompakte Räume, Filter, Heine-Borel-Theorem.

Резюме - В связи с этим я опишу некоторые свойства общей топологии, которые являются фундаментальными для начала изучения этого раздела современной математики с аксиоматической точки зрения. В некоторых случаях я предлагаю доказательства утверждений, которые описывают эти свойства, чтобы иметь дело с понятием фильтра в топологических пространствах. Я подчеркиваю понятие компактных пространств, из-за важности, которую это имеет.

ключевые слова - топологические пространства, компактные пространства, фильтры, Теорема Гейне-Бореля.

Mathematical Subject Classification: 53-02.

I. INTRODUCCIÓN

Algunas propiedades topológicas [1].

Definición 1.

$f: X \rightarrow Y$ es un mapa $\wedge (f)x = x \rightarrow x$ está fijo por f , es decir x es un punto fijo de f .

Consecuencia 1.

Se tiene una propiedad topológica cuando se afirma que X tiene la propiedad del punto fijo.

Consecuencia 2.

El intervalo $[0, 1]$ tiene la propiedad del punto fijo.

Prueba.

Supongamos que $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es un mapa continuo. $f(0) = 0 \vee f(1) = 1 \rightarrow \exists P_f$, Punto Fijo. Así se habrá probado lo anterior. Pero, si $f(0) > 0 \wedge f(1) < 1$, entonces se define una nueva función $g(x) = f(x) - x$. Es así que $g(0) > 0 \wedge g(1) < 0$. Por el Teorema del valor medio, se garantiza que un existe un punto c entre 0 y 1 de tal forma que $g(c) = 0$, es decir $f(c) = c$. Entonces c es el punto fijo de f .

Definición 2.

Una ruta en un espacio topológico X es la imagen de una función continua $g: [0, 1] \rightarrow X$. Si cualquiera dos puntos en el espacio X se pueden unir por una ruta en X , entonces este espacio X es una ruta conectada R_C .

Consecuencia 3.

$f: X \rightarrow Y$ es continua $\wedge X$ es $R_C \rightarrow f(X)$ es una R_C . Por ello, la ruta de conectividad es una propiedad topológica.

Definición 3. Conectividad.

La noción de conectividad pone de manifiesto las siguientes cualidades: Sea un conjunto A . Éste está conectado si no existen conjuntos $U \wedge V$ abiertos en X que cumplan lo siguiente:

- a) $A \subseteq U \cup V$
- b) $A \cap U \neq \emptyset$
- c) $A \cap V \neq \emptyset$
- d) $U \cap V \cap A \neq \emptyset$

Definición 4.

La imagen continua de un espacio conectado está conectada. En consecuencia la conectividad es una propiedad topológica. Esta proposición es una generalización del Teorema del valor Medio, que al interpretarlo en el presente contexto especifica que cuando un intervalo está conectado, su imagen continua también lo está. Por ejemplo, sea m un valor cualquiera. Si este valor se localiza entre $f(p)$ y $f(q)$ entonces m está en la imagen de $[p, q]$, es decir que un punto c existe entre p y q tal que $f(c) = m$.

Consecuencia 4.

Si un subconjunto A de un espacio cualquiera está conectado y x es un punto límite de A , entonces $A \cup \{x\}$ también está conectado.

Prueba.

Supongamos que U y V son conjuntos abiertos no conectados $A \cup \{x\}$. Debido a que A está conectado, entonces está completamente contenido en U o también completamente contenido en V . Por lo tanto x debe estar en el otro conjunto, es decir: $A \subseteq U \wedge x \in V$. Pero esta aseveración contradice que x sea un punto límite de A , ya que V es un conjunto abierto que contiene a x pero no contiene al conjunto A . De ahí que no existen los conjuntos discontinuos U y V , lo que prueba la consecuencia anterior.

II. NOCIÓN 1. COMPACTACIÓN O COMPRESIÓN.

Un subconjunto de R^n es compacto si está cerrado (que contiene todos sus puntos límite) y limitado (que está contenido en un enjambre o aglomeración de algo, cuyo radio es posiblemente muy largo). Por ejemplo, R^1 no es compacto debido a que no está limitado. El intervalo $(0, 1)$ tampoco es compacto porque no está cerrado. Sin embargo, el intervalo $[0, 1]$ está tanto cerrado como limitado, por ello, es compacto. [1] [2] [3].

III. NOCIÓN 2.

Si X es un espacio topológico, una colección de conjuntos $\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$, y cada uno de ellos abierto en $X \rightarrow \exists C_\alpha$ (cobertura abierta) de X , si $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Además, el espacio X es compacto si, para cada cobertura abierta de X , existe una subcolección finita de $\{U_\alpha\}$ que también es una cobertura abierta de X . En otras palabras, existen infinitos conjuntos U_α cuya unión es todo X .

En términos de los espacios euclidianos, las nociones previas tienen sustento axiomático en el Teorema Heine-Borel [4] [5], que describo en las preposiciones 1 a y 1 b.

Proposición 1.

- Un subconjunto $A \in \mathbb{R}^n$ está cerrado y limitado si y sólo si cada cobertura abierta de A contiene una subcolección finita cuya unión pertenece completamente al conjunto A . [1].
- Los subconjuntos compactos de un espacio euclidiano R^n son precisamente los que están cerrados y limitados [6].

Consecuencia 5.

Todo espacio métrico es un espacio de Hausdorff [7].

Proposición 2.

Supongamos que K es compacto (noción 1), y F es un conjunto cerrado, en un espacio topológico X . $F \subset K \rightarrow F$ es compacto [6] [8].

Prueba: Si $\{V_\alpha\}$ es una cobertura abierta de F y $W = F^c$, entonces $W \cup \bigcup_{\alpha} V_\alpha$ cubre al conjunto X ; de ahí que

exista una colección finita $\{V_{\alpha_i}\}$ tal que $K \subset W \cup V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n}$. Entonces tenemos que $F \subset V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n} \subset W \cup V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_n}$

Escriba aquí la ecuación.

Corolario 1.

Si $A \subset B$ y si B posee cerradura compacta, entonces el conjunto A posee cerradura compacta [6].

IV. NOCIÓN 3.

Según Frechet, un espacio topológico se llama compacto si cada conjunto finito de puntos tiene al menos un punto de agrupación [5].

V. NOCIÓN 4.

Un espacio métrico es compacto solo si y cada secuencia de puntos contiene una secuencia parcial convergente [5].

Como consecuencia directa de ello se afirma que un espacio métrico compacto es en general, un compacto y que presenta las siguientes características:

- Cada secuencia decreciente de conjuntos cerrados no vacíos $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_k \dots$ tiene un conjunto promedio no vacío (promedio de Cantor) [5].
- Propiedad de cobertura débil de Heine – Borel. Cada cobertura abierta medible de un espacio compacto R , contiene una cobertura finita (del mismo espacio). Un término convencional comúnmente utilizado para los espacios compactos medibles es el término *compactum*.

Ahora, abordemos la definición de espacio topológico compacto en términos del concepto de *filtro* [9].

Definición 5.

Un filtro $\mathcal{F}$ sobre X es una familia no vacía de subconjuntos de X que cumplen las siguientes condiciones:

- $F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$.
- $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F} \forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}$.
- $F \in \mathcal{F} \wedge F \subset G \rightarrow G \in \mathcal{F}$.

Definición 6.

En un espacio topológico (R, τ) , el punto p es adherente al filtro α , si $\alpha \wedge \tau p \neq \emptyset$, donde α representa un filtro y $\emptyset$ representa un filtro cero o nulo y τ espacio topológico [9].

Para ello se cumplen las siguientes condiciones:

- p es un punto adherente a α .
- Existe un filtro β convergente con p y que además satisface: $\emptyset < \beta \leq \alpha$.
- El filtro principal generado por el punto $\bar{p} \leq \alpha$ (cerradura al filtro α).

Prueba.

Si p es adherente a α entonces el filtro $\mathfrak{b} = \alpha \wedge \tau p$ cumple la condición (b). Si $\mathfrak{o} < \mathfrak{b} \leq \alpha$ y además si $\mathfrak{b} \leq \tau p$, entonces $\tau p \wedge \bar{A} \geq \mathfrak{b} > \mathfrak{o}$, de ahí que $p \in \dot{A} \forall A \in \alpha$. Además, $\bar{p} \leq \dot{\alpha} \rightarrow p \in \dot{A}$ por lo que $\tau p \wedge \bar{A} \neq \mathfrak{o} \forall A \in \alpha$, y así $\tau p \wedge \alpha \neq \mathfrak{o}$.

Conclusión. Las proposiciones anteriores permiten abordar la siguiente idea, entre otras desde luego. Sea $R_i, i = 1, 2, \dots$ un paracompacto, T_2 , M -espacios. La consecuencia directa es el producto espacial $R = \prod_{i=1}^{\infty} R_i$, que es paracompacto T_2 , M -espacios. Un espacio R es un M -espacio si y sólo si existe una secuencia $\mathfrak{U}_i, i = 1, 2, \dots$, de coberturas abiertas de R que cumple las siguientes condiciones [10]: a) $\mathfrak{U}_1 > \mathfrak{U}_2^* > \mathfrak{U}_2 > \mathfrak{U}_3^* > \dots$, . b) Sea $\mathfrak{C}$ una colección contable y p_0 un punto de R tal que para cada i existe un miembro de $\mathfrak{C}$ contenido en $S(p_0, \mathfrak{U}_i)$ entonces $\cap \{\bar{C} \mid C \in \mathfrak{C}\} = \emptyset$.

REFERENCIAS

- [1] Goodman, S. E.: *Beginning topology*: Thomson Learning Inc. (N. Y., 2005)
- [2] Roseman, D.: *Elementary Topology*: Prentice Hall Edition. (N.J., 1999).
- [3] Moore, T.: *Elementary General Topology*. Prentice Hall Edition. (N. J., 1964).
- [4] Bean, M. *Dictionary of Theories*: (Edited by Jenifer Bothamley). Visible Ink Edition. (Detroit, MI., 2002).
- [5] Alexandroff, P.: *Topologie*: Verlag von Julius Springer. (Berlin, 1935)
- [6] Rudin, W. *Real and complex Analysis*: McGraw – Hill Edition. (N. Y., 1966)
- [7] Dixmier, J.: *General Topology*: Springer Verlag. (N. Y., 1984)
- [8] Ghrist, R.: *Elementary Applied Topology*: University of Pennsylvania Press. (Pittsburgh., 2014)
- [9] Kowalsky, H. J.: *Topological Spaces*. Academic Press. (N. Y., 1965)
- [10] Nagata, J-I. *Modern General Topology*: Springer-Verlag (N.Y. 1968),

Evaluación de alternativas QFD con resultados inciertos por medio de análisis de decisiones.

Leopoldo Viveros Rosas[#], Marco Ivan Rivera Bazan[#]; Rebeca Díaz Téllez[#],
Mario Luis Chew Hernández[#] y José Roberto Pérez Torres[#].

[#] TECNm – TESCO, Av. 16 de septiembre 54, Coacalco, Estado de México, México.
leopoldo@tesco.edu.mx, marco_mct@tesco.edu.mx, rebeca.sub.a@tesco.edu.mx,
mario@tesco.edu.mx, jose.roberto@tesco.edu.mx

Resumen- En este trabajo se presenta la aplicación del análisis de decisiones para dar claridad de acción cuando se presenta incertidumbre en la selección de alternativas referentes al material utilizado para la producción de un herramienta utilizado en la fabricación de pirotécnica. Se aplica el despliegue de la función de calidad (Quality Function Deployment - QFD) para transformar las verbalizaciones del cliente en variables de ingeniería y se establecen los criterios necesarios para la definición de eventos inciertos. Posteriormente se aplica análisis de decisiones para la ganancia esperada por cada material y para la utilidad subjetiva esperada. El modelo planteado permite al decisor, con ayuda del analista, modificar los valores de entrada permitiendo así la adecuación a diversos problemas similares.

Palabras Clave- Análisis de Decisiones, Incertidumbre, QFD, Utilidad Subjetiva Esperada.

Abstract- This work presents the application of decision analysis to give clarity of action when uncertainty arises in the selection of alternatives regarding the material used for the production of a tooling used in the manufacture of pyrotechnics. The Quality Function Deployment (QFD) is applied to transform the client's verbalizations into engineering variables and the necessary criteria are established for the definition of uncertain events. Later, decision analysis is applied for the expected profit for each material and for the expected subjective utility. The proposed model allows the decision maker, with the help of the analyst, to modify the input values, thus allowing adaptation to various similar problems.

Keywords- Decision Analysis, Expected Subjective Utility QFD, Uncertainty.

Mathematical Subject Classification: 90C70.

I. INTRODUCCIÓN

El despliegue de la función de calidad (Quality Function Deployment) QFD, por sus siglas en inglés; es una metodología de planeación que introduce el control de calidad en la etapa del diseño y/o desarrollo de un producto o servicio; es un mecanismo formal para asegurar que la “voz del consumidor” sea escuchada y tomada en cuenta en todas las etapas del desarrollo del producto o servicio [1]. El QFD es un sistema estructurado que permite identificar necesidades y expectativas de los clientes, comúnmente llamada “escuchar la voz del cliente” y traducirlos al lenguaje de ingeniería ayudando de esta manera a determinar los requisitos críticos de diseño para lograr la satisfacción del cliente [2]. Por otra parte, el Análisis de Decisiones consiste en herramientas y modelos para mejorar la toma de decisiones; tiene un especial uso cuando las decisiones múltiples objetivos en conflictos y cuando las consecuencias o resultados son inciertos o presentan incertidumbre [3]. En este trabajo se presenta una aproximación de la introducción de herramientas de análisis de decisiones al QFD; en particular se introduce los árboles

bayesianos de decisión y el análisis de preferencias a la evaluación de alternativas de diseño.

II. REVISIÓN DE LITERATURA

En [4] se presenta una revisión analítica de la literatura sobre artículos publicados referentes a QFD difuso (FQFD) entre 2000 y 2011, llegando a las siguientes conclusiones: La mayoría de los estudios se centraron en métodos cuantitativos para lograr la fase 1 de QFD o casa de la calidad; las técnicas más empleadas son métodos de toma de decisiones de multicriterio. Aunque el propósito principal de usar QFD era el desarrollo de productos, otros factores como el análisis de riesgo y competitividad deben considerarse en el proceso de desarrollo del producto.

Además [5] presentan una metodología para determinar la función de transferencia en la herramienta de la casa de calidad del método de implementación de funciones de calidad. La función de transferencia relaciona las características del producto con los requisitos del cliente sobre el producto.

En [6] mencionan que el diseño es un tema interdisciplinario, por lo tanto, el proceso de diseño tiene una cierta complejidad, su trabajo muestra la combinación de EGM (método de la cuadrícula para evaluación) y QFD difuso; el EGM es utilizado para analizar los requisitos del cliente y los elementos de diseño, para que con el proceso analítico jerárquico (AHP por sus siglas en inglés) se calculen los valores de peso de los requisitos del cliente y por último se establece la matriz de relaciones difusa entre los requisitos del cliente y los elementos de diseño.

Por su parte [7] por medio de un experimento ortogonal virtual proponen un método para incorporar en análisis de sensibilidad en el QFD, por medio de un software integrado crean un entorno en el que los parámetros de diseño se asignan con diferentes valores y las acciones correspondientes se supervisan en tiempo real.

Además [8] proponen un modelo de despliegue de funciones de calidad en dos etapas para identificar las tecnologías centrales desde una perspectiva basada en la demanda; después de obtener las necesidades del cliente, se utiliza el análisis de clúster para recopilar temas tecnológicos. Posteriormente construyen la matriz de relación entre temas tecnológicos y códigos manuales primarios. Finalmente, los códigos manuales secundarios se pueden calcular mediante la información de patentes en la base de datos de patentes de Derwent.

Por su parte [9] menciona la importancia que tiene el QFD como herramienta sistemática para traducir los requisitos del cliente (CR) en características de ingeniería factibles (CIF) de

un producto. En su trabajo se aplica la teoría de la incertidumbre al QFD, y presenta un método de valor esperado para obtener la importancia de las CIF y clasificar las entradas lingüísticas como variables inciertas; finalmente, propone ejemplo de mejora de la cámara digital donde los resultados experimentales se comparan con la situación que ignora las correlaciones entre las CIF.

Por otro lado [10] se muestra un estudio de la combinación de QFD y el método TRIZ (Theory of Inventive Problem Solving). Se desarrolla y se demuestra un marco estructural para modificar el proceso de diseño del servicio en tres fases diferentes de resolución de problemas.

También en [11] implementan un modelo de diseño innovador basado en QFD y TRIZ, donde en primer lugar, los requisitos del cliente son analizados por la Casa de la Calidad, posteriormente se identifican los problemas que deben resolverse en el diseño.

Por otro lado [12] propone una técnica de toma de decisiones grupales (GDM) integrada basada en el modelo lingüístico de duplas, el despliegue de la función de calidad (QFD) y el método de la técnica para el rendimiento de pedidos por similitud con la solución ideal (TOPSIS).

También [13] formulan la selección del proveedor de servicios de logística inversa como un problema de toma de decisiones de criterios múltiples y desarrollan una metodología para seleccionar el mejor proveedor de servicios de logística inversa para la empresa de fabricación de piezas de moldeo por inyección utilizando la técnica de preferencia de pedido por similitud con la solución ideal (TOPSIS) e integrándolo con la implementación de la función de calidad (QFD).

A su vez [14] dice que la calidad, el costo y el tiempo de desarrollo de productos tienen un impacto directo en la productividad, en la participación del mercado y en la rentabilidad de la empresa. A medida que los usuarios alcanzan mayor conciencia sobre sus deseos, es necesario mayor nivel de calidad y una respuesta en el tiempo más rápida.

III. PROBLEMA

El cohete es un artefacto pirotécnico detonante, de forma cilíndrica y de fabricación artesanal, hecha a base de pólvora negra colorada, confinada, en tubo de cartón y envuelta en papel. Su diámetro varía de 1 a 3 centímetros y su longitud es de 6 a 15 cm.

Actualmente en la industria de la pirotecnia de la región de Tultepec, Estado de México; específicamente en la elaboración de cohete, un gran porcentaje se elabora de manera artesanal. Cabe mencionar que aproximadamente el 70% de la pirotecnia toma como base principal el cohete. Por lo general la aguja

es la que sufre mayor desgaste y es este elemento que con mayor frecuencia es cambiado por uno nuevo.

A continuación, se describen los pasos para la elaboración del cohete.

Paso 1. Colocar tubos de cartón de arranque 8.2¹.

Paso 2. Colocar placa que mantiene alineados los tubos de cartón y además ayuda para la dosificación de la arcilla como también de la pólvora (mezcla).

Paso 3. Colocar placa de nylamid² con los barrenos desalineados para dosificar la arcilla.

Paso 4. Llenar barrenos con arcilla (Barro) al ras de la placa.

Paso 5. Alinear las 2 placas de nylamid permitiendo que la arcilla caiga dentro de los tubos de arranque 8.2.

Paso 6. Comprimir la arcilla (Barro) ya dosificada.

Paso 7. Una vez que la pólvora comprimida ha llegado al nivel requerido se procede a utilizar la placa de nylamid con los amacizadores.

Del paso 2 al paso 7 se repite un promedio de 14 veces hasta que se tiene el nivel deseado de pólvora.

Paso 8. Dosificar la tapadura (mezcla con un poco de agua) al ras.

Paso 9. Comprimir la tapadura.

Paso 10. Botar el arranque de cohete 8.2 ya terminado.

La Fig. 1 se muestra el producto terminado.



Fig. 1. Arranque de cohete 8.2 totalmente terminado.

[El proceso de compresión de mezcla se hace en un dispositivo hidráulico que realiza doce compresiones simultáneas; en la Fig. 2 se muestra la parte A y B del dispositivo que sufre desgaste por fricción]

¹ Los tubos de arranque 8.2 son mencionados de esa forma por el productor.

² Familia de las Poliamidas (PA) Nylon.



Fig. 2. Piezas que sufren desgaste por fricción.

Actualmente la aguja, el amacizador y el taqueador se producen de latón o acero inoxidable. Con el de latón se producen aproximadamente 100 gruesas antes de tener que cambiar y con acero inoxidable 300 gruesas³.

IV.DESARROLLO

QFD

De las verbalizaciones con el cliente y la aplicación de herramientas de QFD para dar claridad a la voz del cliente, se deduce que lo que se busca es que la aguja, el amacizador y el taqueador para el proceso de compactación en la elaboración de arranque 8.2, tenga una durabilidad mayor. Como el productor maquina sus propias herramientas las características verbalizadas para el material de requerimiento son:

- Resistencia al decarbonizado.
- Resistencia al agrietamiento.
- Dureza HRC entre 40 y 50.
- Maquinable.
- Tenacidad alta.
- Resistencia al ablandamiento.
- Resistencia al desgaste.

En la Tabla 1 se muestran algunas características muy útiles que fueron el reflejo de las verbalizaciones del cliente.

Tabla 1. ALTERNATIVAS DE ACERO

Característica	Alternativa 1 (A1)	Alternativa 2 (D2)	Alternativa 3 (M2)
Resistencia al decarbonizado	Media	Media	La más alta
Resistencia al agrietamiento	La más alta	La más alta	Media
Dureza aproximada (HRC)	60 – 62	54 – 61	62 – 65
Maquinabilidad	Alta	Baja	La mas alta

Tenacidad	Muy alta	Media	Media
Resistencia al ablandamiento	Alta	Alta	Baja
Resistencia al desgaste	Media	Media	Alta

De acuerdo con la entrevista con el cliente, la importancia de los requerimientos se pondera como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2. PONDERACIÓN DE REQUERIMIENTOS

Requerimientos del cliente	Peso / Importancia	Peso Relativo
Bajo costo	10	23.8
Dureza	7	16.7
Ligero	8	19
No produzca tanta chispa	8	19
La punta dure	9	21.4

La Fig. 3 muestra la “casa de la calidad” desarrollada para la selección entre las alternativas de materiales.

Se puede identificar que de acuerdo con las relaciones quedarían de la siguiente manera las prioridades para fabricar el herramental:

1. Buen material: 24.3%, Tener un buen material es lo que se busca principalmente por el cliente, dado que, si el costo del material no es elevado, sea ligero y la punta dure, entonces podrá cumplir con los requisitos del cliente

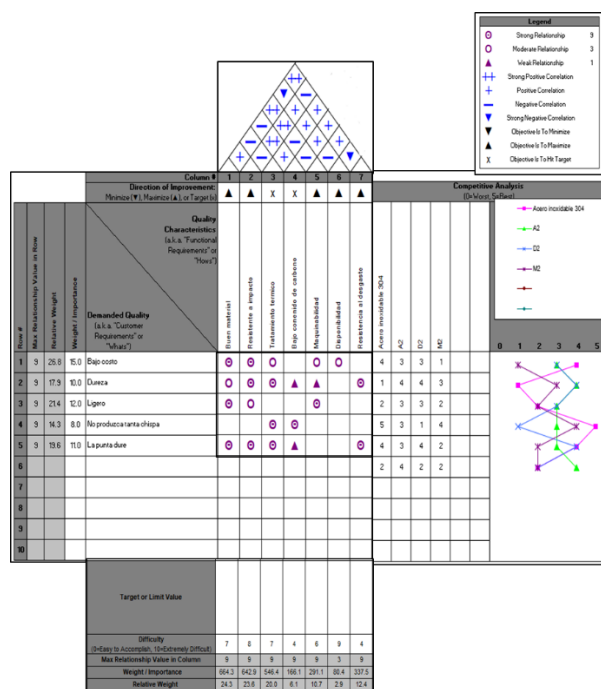


Fig. 3. Casa de la calidad para la selección de materiales.

2. Resistencia al impacto: 23.6%, la punta de la herramienta debe resistir varios impactos consecutivos.

³ Una gruesa son 12 docenas.

3. Tratamiento térmico: 20%, si se realiza el tratamiento térmico adecuadamente se puede alcanzar las durezas propuestas por el fabricante.

4. Resistencia al desgaste: 12.4%, el material no debe desgastarse tan rápido, en especial la punta de la herramienta que es la que se encuentra en trabajo constante y es una de las problemáticas del cliente.

5. Maquinabilidad: 10.7%, debe ser de fácil maquinabilidad, ya que mientras más difícil sea, se necesitarían herramientas de corte más caras y elevaría el costo de la herramienta, siendo esto un problema para el cliente.

6. Bajo contenido de carbono: 6.1%, la ausencia de carbono en un material que produce que un material no tenga tanta dureza y en este caso no produzca chispa.

7. Disponibilidad: 2.9%, la disponibilidad dado que los materiales son comunes, tardan en promedio de 1 -2 días hábiles.

Se puede observar que los tres aceros que se manejan (A2, D2 y M2) tienen muy buenas propiedades mecánicas, pero el A2 mantiene características mecánicas que lo destacan. En la resistencia al impacto, realizada con una prueba de impacto de Entalla Charpy C, tiene una resistencia al impacto de 40 ft-lb, respecto a los 21 ft-lb y a los 20 ft-lb del D2 y M2 respectivamente. Por otro lado, una característica mecánica es la tenacidad, es la energía de deformación total que es capaz de absorber o acumular un material antes de alcanzar la rotura en condiciones de impacto, por acumulación de dislocaciones, de acuerdo con el fabricante de Aceros SISA, su tenacidad del A2 es mayor que a D2 y M2; esto es una gran ventaja ya que el material está en constante esfuerzo y hará que la punta sea capaz de soportar repetitivos golpes y se traduce en que la punta del material no se desgastará tan fácil. En cuanto al precio el del A2 y D2 son los mismos, aproximadamente de 7.35 USD/ kg, contra los 20.50 USD/kg del M2 que lo pone en desventaja porque casi es tres veces el precio de sus competidores.

ANÁLISIS A PRIORI

Para la selección del material adecuado para la fabricación de la aguja, el amacizador y el taqueador se desean considerar eventos inciertos para lo cual se desarrolla el diagrama de árbol que se muestra en la Fig. 4, donde los cuadrados representan las alternativas y las circunferencias los eventos inciertos.

Donde los eventos de exitoso y no exitoso para cada característica de calidad se define como sigue.

Tenacidad

• Exitoso: resistencia al impacto por prueba de impacto Entalla Chaspy C, mayor a 35 ft. -lb. ó 50 (J).

No exitoso: resistencia al impacto por prueba de impacto Entalla Chaspy C, menor a 35 ft. -lb. ó 50 (J).

Durabilidad

• Exitoso: mayor o igual a 300 gruesas.

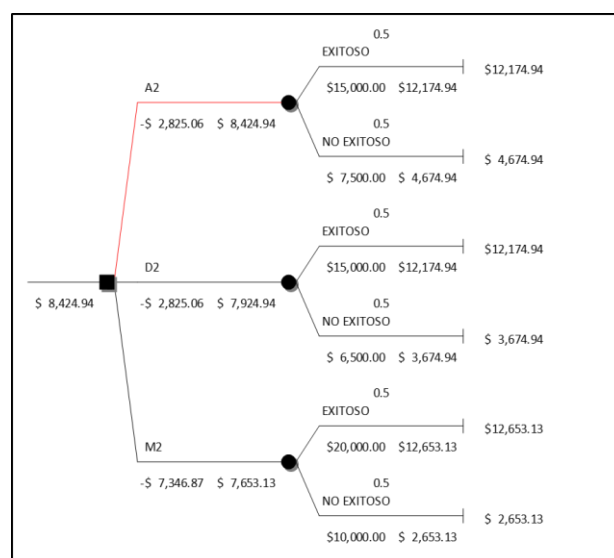


Fig. 4. Árbol de decisión preliminar.

• No Exitoso: menor a 300 gruesas.

Dureza HRC

• Exitoso: mayor o igual a 60.

• No exitoso: Menor a 60.

Costo

• Exitoso: Costo – Beneficio mayor al actual.

• No exitoso: Costo – Beneficio menor al actual.

Disponibilidad

• Exitoso: Tiempo de adquisición menos de un mes.

• No exitoso: Más de un mes.

Para el árbol de decisión preliminar, se considera una probabilidad 0.50 – 0.50 para el resultado del evento incierto Exitoso – No exitoso.

Con estos datos la mejor alternativa es seleccionar el material A2 con una ganancia esperada de \$8424.94⁴.

ANÁLISIS POSTERIORI

Para el análisis posteriori se recomienda desarrollar un experimento con cada uno de los materiales, para considerar un evento exitoso, el resultado del experimento debe estar por lo menos en el límite inferior de las características menos - mejor y por arriba del límite superior de las características más - mejor. Es decir, debe cumplir como mínimo⁵.

• Tenacidad - resistencia al impacto por prueba de impacto Entalla Chaspy C, mayor a 35 ft. -lb. ó 50 (J).

• Durabilidad - mayor o igual a 300 gruesas.

• Dureza HRC - mayor o igual a 60.

• Disponibilidad - Tiempo de adquisición menos de un mes.

Considerando una eficiencia de la prueba de 90% cuando determina que el material será exitoso y un 80% cuando determina que el material no será exitoso.

En la Fig. 5 se muestra el árbol de probabilidades para actualizar la información con el teorema de Bayes.

⁴ Los costos por herramienta y los beneficios son proporcionados por el productor de la localidad.

⁵ La característica de costo beneficio se evalúa en el árbol.

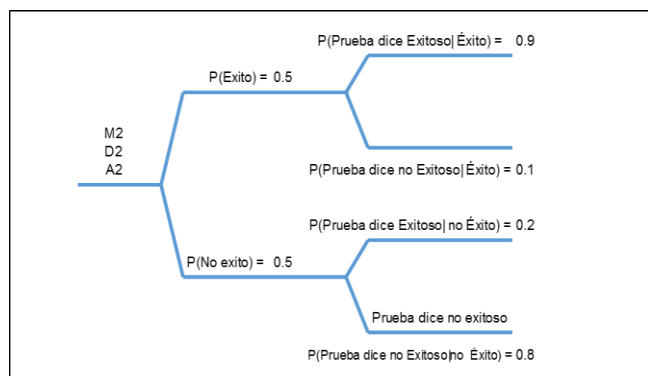


Fig. 5. Árbol para teorema de Bayes.

Es importante resaltar que para el modelo que se plantea se utiliza la misma probabilidad para cada uno de los materiales, esto puede no ser así. El modelo permite el cambio de estas probabilidades. Con la información posteriori se realizan los árboles de decisión que se muestra en las 6, 7 y 8.

Del árbol de la Fig. 6 se observa que la ganancia esperada si se prueba el material A2 es de \$8,512.44, donde el plan de acción dependerá del resultado de la prueba. Si la prueba dice que el material será exitoso, se seleccionará el material A2. Si la prueba indica que el material no será exitoso, se seleccionará el material D2.

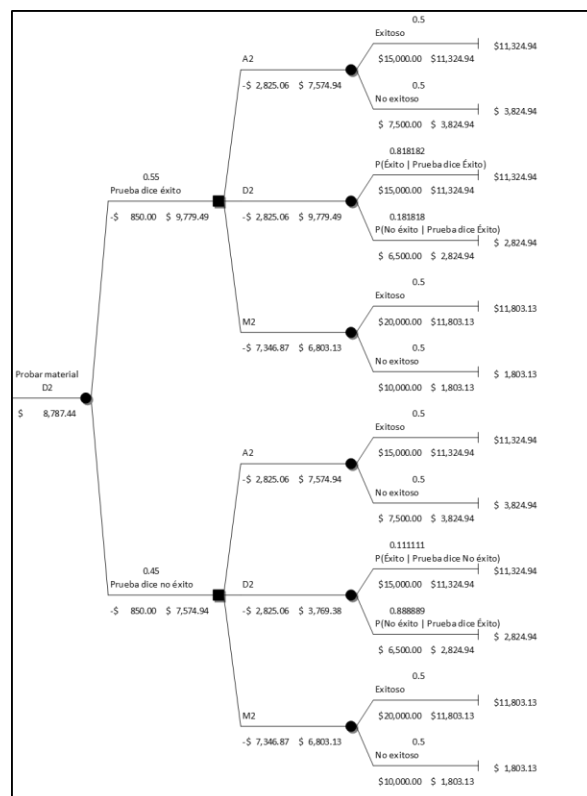


Fig. 7. Árbol posteriori – Prueba material D2.

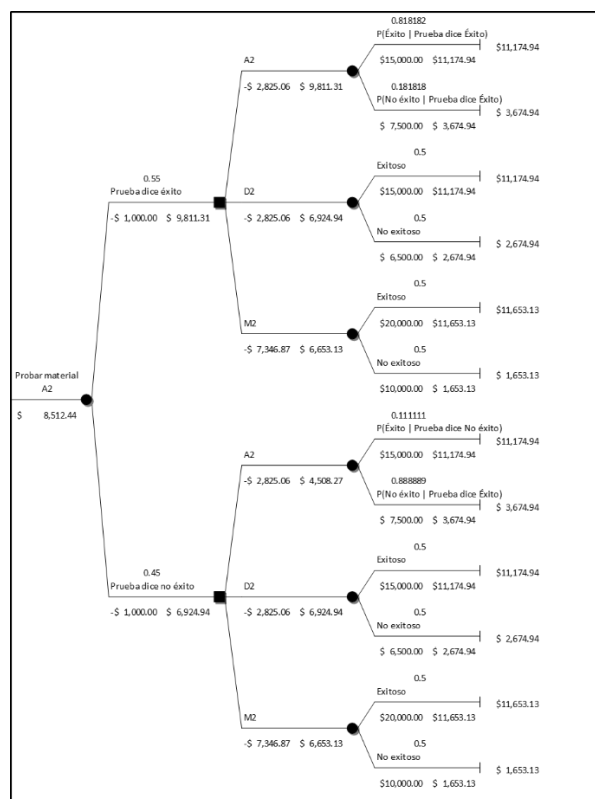


Fig. 6. Árbol posteriori – Prueba material A2.

Por otro lado, si el material que se prueba es el D2, Fig. 7, la ganancia esperada es de \$8,787.44 y el plan de acción es; si la prueba dice que el material será exitoso, se seleccionará el material D2. Si la prueba indica que el material no será exitoso, se seleccionará el material A2.

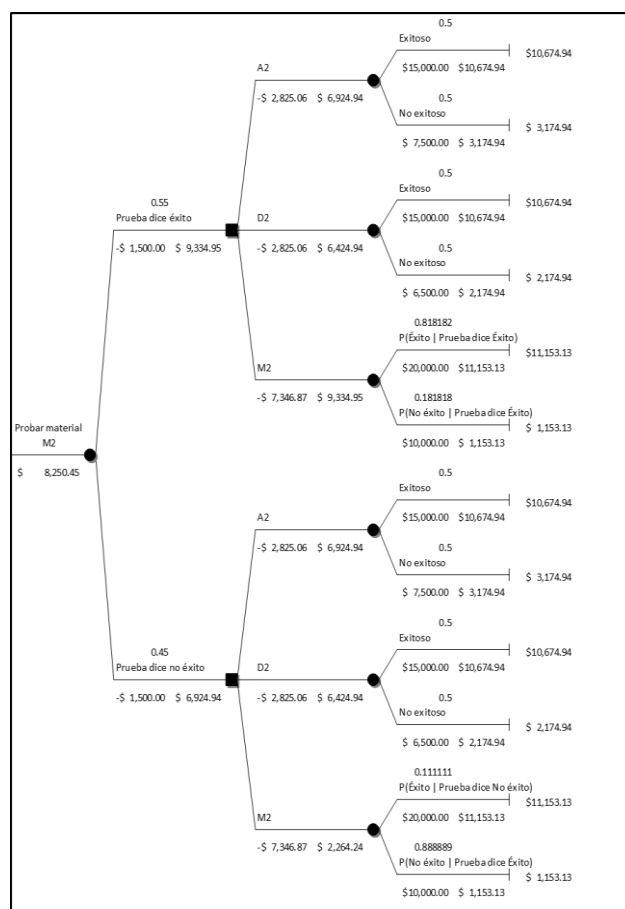


Fig. 8. Árbol posteriori – Prueba material M2

Por último, si el material que se prueba es M2, de la Fig. 9 se observa que la ganancia esperada \$8,250.45. Si la prueba del material indica que será exitoso se debe seleccionar el material M2; si la prueba indica que el material no será exitoso se seleccionará el material A2.

UTILIDAD SUBJETIVA ESPERADA

Se construye un modelo SUE (Utilidad Subjetiva Esperada) estableciendo los prospectos de alternativas que se muestran en la Tabla 3.

Considerando que la decisión arriesgada se puede entender como una apuesta entre distintas loterías [15]. Es decir, una persona racional preferirá, en primer lugar, aquella lotería que le dé el mayor premio; en segundo lugar, una persona racional será indiferente entre una lotería cuyos únicos premios sean ganar (G) o perder (P) y alguna lotería que ofrezca un premio intermedio entre G y P.

Tabla 3. CLASIFICACIÓN DE PROSPECTOS DE ALTERNATIVAS

Número	Prospecto	Clave
1	Material A2 – Exitoso	A2E
2	Material A2 - No exitoso	A2NE
3	Material D2 – Exitoso	D2E
4	Material D2 - No exitoso	D2NE
5	Material M2 – Exitoso	M2E
6	Material M2 - No exitoso	M2NE

Para transformar información con que se cuenta en este contexto de incertidumbre en una distribución a priori de probabilidades subjetivas, el decisor ha de elegir de manera consistente entre distintas alternativas presentes en una serie de problemas hipotéticos sencillos de resolver. Se generan loterías posibles como variables aleatorias descritas como un par

$$I = (x, p) \quad (1)$$

en el que el vector

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2)$$

especifica los pagos posibles, y el vector

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (3)$$

Indica las probabilidades con que se reciben dichos pagos posibles. En las Fig. 9, 10, 11 y 12 se muestran las loterías planteadas.

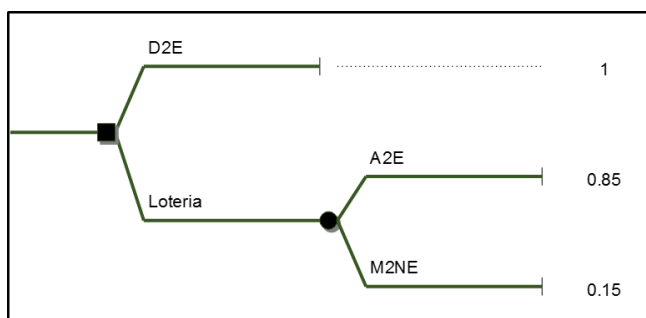


Fig. 9. Lotería de indiferencia para el prospecto D2E.

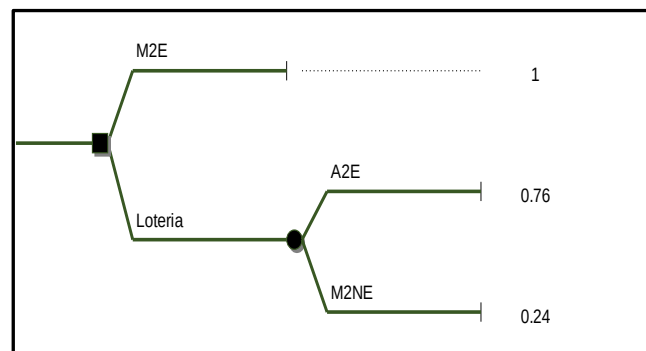


Fig. 10. Lotería de indiferencia para el prospecto M2E.

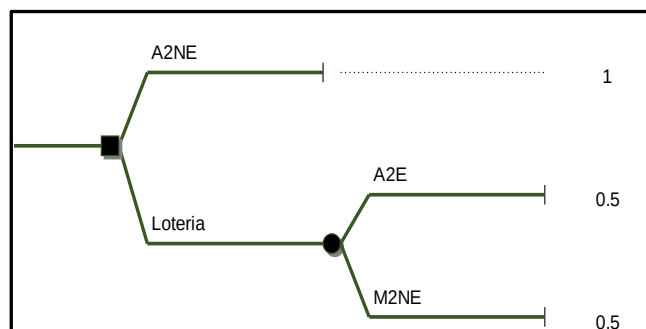


Fig. 11. Lotería de indiferencia para el prospecto A2NE.

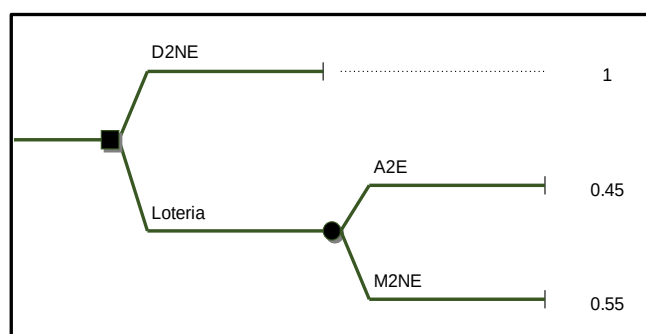


Fig. 12. Lotería de indiferencia para el prospecto D2NE.

Con los resultados de las loterías generadas se formula el árbol de la Fig. 13 en la que se puede observar que cada alternativa A2, D2, M2; cuentan únicamente con dos prospectos (Mejor, Peor) con lo que se calculan las probabilidades de preferencia de cada prospecto para cada alternativa.

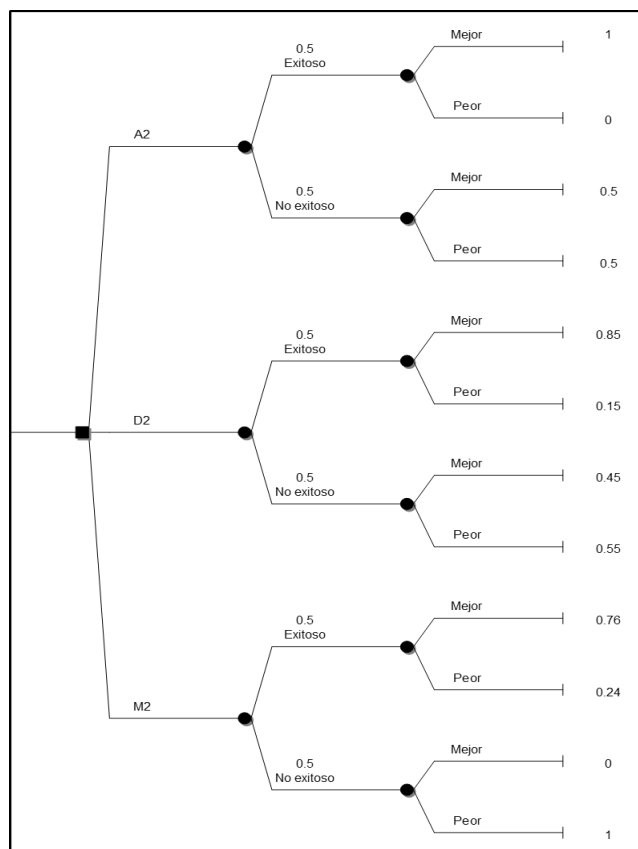


Fig. 13. Árbol de decisión con valores de certeza.

$$\begin{aligned}
 A2 - PEOR &= (0.5 * 0) + (0.5 * 0.5) = 0.25 \\
 D2 - MEJOR &= (0.5 * 0.85) + (0.5 * 0.45) = 0.65 \\
 D2 - PEOR &= (0.5 * 0.15) + (0.5 * 0.55) = 0.35 \\
 MA2 - MEJOR &= (0.5 * 1) + (0.5 * 0.5) = 0.75 \\
 2 - MEJOR &= (0.5 * 0.76) + (0.5 * 0) = 0.38 \\
 M2 - PEOR &= (0.5 * 0.24) + (0.5 * 1) = 0.62
 \end{aligned}$$

En la Fig. 14 se muestra la representación de las alternativas como probabilidades del mejor prospecto.

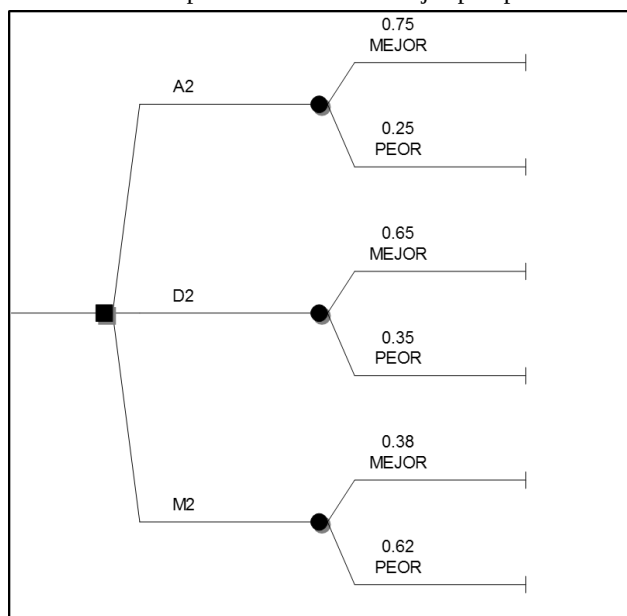


Fig. 14. Alternativas como probabilidades del mejor prospecto.

En la Fig. 14, se puede observar que las alternativas A2, D2 y M2 producen probabilidades de preferencia de 0.75, 0.65 y 0.38, respectivamente sobre el mejor resultado de cada prospecto. Considerando estas probabilidades como utilidad subjetiva esperada se construye el árbol de decisión de la Fig. 15.

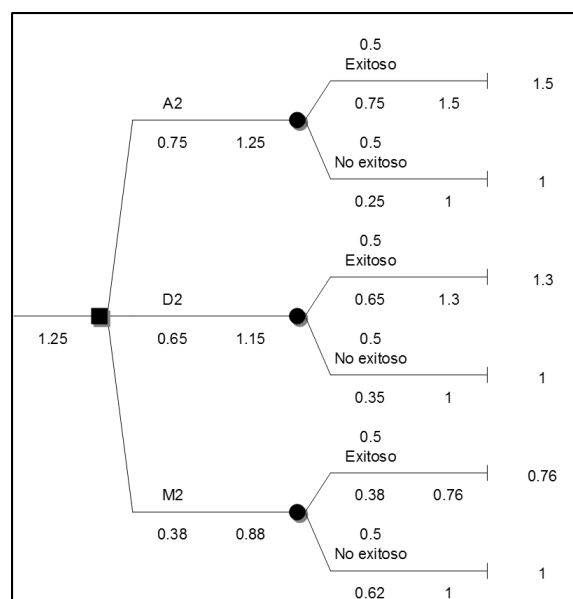


Fig. 15. Árbol de decisión utilizando preferencias como unidad de medida.

V. CONCLUSIONES

Utilizando el despliegue de la función de calidad se generan las alternativas para la selección de material para la producción de arrancadores en pirotecnia en para un taller de la localidad. Esas alternativas son A2, D2 y M2; para las cuales se dan especificaciones de funcionamiento y poder determinar si la selección de material dará un producto exitoso o no exitoso.

Con el árbol de decisión de la Fig. 8 se observa que la mejor selección de material es D2, con una ganancia esperada de \$8,787.44.

Se observa que el mayor valor esperado se tiene cuando se prueba el material A2 y resulta que es exitoso, se tiene una ganancia de \$9,811.31. Pero si resulta que el material no es exitoso se tendrá una ganancia de \$6,924.94; que es la menor ganancia esperada, misma que se obtiene si se selecciona el material D2.

Por otro lado, si se selecciona el material D2, y resulta que no es exitoso el material la ganancia mínima esperada es \$7574.94; que es la mayor de las ganancias esperadas.

Con lo que se refiere al análisis de preferencias, del árbol de la Fig.15, se puede observar que, según las preferencias del decisor, el material a seleccionar es el A2.

Con este trabajo se demuestra que es posible aplicar análisis de decisiones a la selección de alternativas que planeta el QFD.

Estas decisiones pueden ser en base a valores monetarios de cada alternativa o a preferencias del decisor.

Aun cuando los datos utilizados en el modelo presentado son el resultado de un decisor en particular, el modelo queda planteado para que pueda ser utilizado en situaciones que requieran claridad de acción en la selección de diseño de procesos o servicios; en particular para alternativas que sean planteadas por el despliegue de la función de calidad.

REFERENCIAS

- [1] Mireles-Muñoz, R.: *Implementación del despliegue de la función de calidad (QFD)*, 1st ed., UAEH, Ed. Hidalgo, México: (UAEH, 2007).
- [2] Pastor-Sanmillán, A.: *Aplicación de las técnicas despliegue de la función de calidad (QFD) y proceso analítico jerárquico (AHP) a la mejora de la calidad de la formación de posgrad.* Tecnología, Ciencia y Educación CEF, vol. 1, no. 5, pp. 11 - 36, (México, 2016).
- [3] Ward, E., Miles, R-F and Winterfeldt, D.F.: *Advances in decision analysis from foundations to applications*. New York, USA: Cambridge University Press, (USA, 2007).
- [4] Abdolshah, M. and Moradi, M.: *Fuzzy Quality Function Deployment: An Analytical Literature Review*: Journal of Industrial Engineering, vol. 2013, pp. 1 - 11, (USA, 2013).
- [5] Sina, S.S. and Bender, B.: *Model based QFD method with the integrated sensitivity Analysis*, in Conference: IEEE 11th Annual IEEE System Conference, Montreal, pp. 1 - 6. (Canada, 2017).
- [6] Z. Yang, L. Yuchung and W. Minghong L. Shuofang: *Study Methods of Design Elements Based on EGM and Fuzzy QFD*: in International Conference on Engineering Simulation and Intelligent Control (ESAIC), pp. 83 - 86 (Changsha, 2018).
- [7] H. Chen, Z. Yuan and X. Chu L. Zhang: *Product Platform Planning through Sensitivity Analysis and Improved QFD Approach* in International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM), pp. 1796 - 1800, (Bangkok, 2018).
- [8] Yingqiao and Hongbin Yan. Xu, *Identifying Core Technologies Based on a Two-Stage QFD Model*, in 10th International Conference on Intelligent Human-Machine Systems and Cybernetics, pp. 356 - 360, (USA, 2018).
- [9] L. Ma: *Determining Importance Weights for Engineering Characteristics in QFD Considering the Correlations Under Uncertainties*, in 2018 2nd IEEE Advanced Information Management, Communication, Electronic and Automation Control Conference (IMCEC), pp. 2716 - 2721, (Xi'an, 2018).
- [10] F. Tseng: *Integrating Service QFD and TRIZ for a Lucky Draw System Design: The Case Study*, in 2017 IEEE 7th International Symposium on Cloud and Service Computing (SC2), pp. 189 - 193, (Kanazawa, 2017).
- [11] W. Song, Z. Li and Y. Li. Y. Li.: *Innovative design of water boilers based on QFD and TRIZ*, in 2017 Chinese Automation Congress (CAC), pp. 3415 - 3418. (Jinan, 2017).
- [12] G. Büyükoçkan and D. Uztürk.: *Combined QFD TOPSIS approach with 2-tuple linguistic information for warehouse selection* in 2017 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE), pp. 1 - 6., (Naples, 2017).
- [13] V. Jain and S. A. Khan., *Reverse logistics service provider selection: A TOPSIS-QFD approach*, in 2016 IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM), pp. 803 - 806, (Bali, 2016).
- [14] Willmer-Escobar, J., Linfati, R., and Adarme-Jaimes, W., *Gestión de inventarios para distribuidores de productos perecederos*, Ingeniería y desarrollo, vol. 35, no. 1, pp. 219 - 239, Enero - Junio 2017 (Colombia, 2017).
- [15] Aguiar, F.: *Teoría de la decisión e incertidumbre: modelos normativos y descriptivos*, EMPIRIA. Revista de Metodología de Ciencias Socia, vol. 1, no. 8, pp. 139 - 160, 2004.

APP y diccionario matemático en LSM para el aprendizaje de la Geometría para escuelas secundarias inclusivas.

Eicka Viana Huihuitoa y Marcos Fajardo Rendón.

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco,
02420 CDMX, México.

eik_010@hotmail.com, fajardoensm@gmail.com

Resumen- El presente artículo propone un diccionario matemático en lengua de señas mexicana, así como el diseño, programación en implementación en Google Play Store de una aplicación móvil (APP) como apoyo para la potencialización del proceso de aprendizaje de la Geometría en escuelas secundarias inclusivas.

Palabras Clave- Educación inclusiva, Tecnologías de la Información y la Comunicación, enseñanza, Problemas de lenguaje-aprendizaje.

Abstract- This work proposes a mathematical dictionary in Mexican sign language with the design, programming and implementation in Google Play Store of a mobile application (APP) as support in the Geometry learning process for inclusive elementary schools.

Keywords- Inclusive education, Information and Communication Technologies, Teaching, Language-based learning disability (LBLD).

Mathematical Subject Classification: 97C50.

I. INTRODUCCIÓN

Según la Encuesta Nacional Demográfica 2014 en México existen un total de 2.4 millones de mexicanos sordos de los cuales el 3.53% son niños de menos de 14 años y solo el 64% asiste a la escuela; la misma encuesta indica que cuando estos niños llegan a adultos (597,566 sordos en el estrato de 30-59 años) sólo el 66.99% estudió hasta nivel básico.

La Lengua de Señas Mexicana no cuenta con un diccionario completo acorde a los conocimientos matemáticos descritos Plan de la SEP (2011) [1] o del nuevo modelo educativo (2017) [2].

En México existen leyes, reglamentos y ordenamientos normativos con sustento internacional que regulan la educación básica; así como los documentos que promueven formas adecuadas de asistencia y apoyo a las Personas con Discapacidad para asegurar su acceso a la información y al no contar con un LSM matemático que permita alcanzar el máximo de los potenciales de los niños de secundaria incurre en los siguientes aspectos:

1. Constitución Política de los Estados Unidos mexicanos: Describiendo protección y la prohibición de cualquier discriminación por discapacidad.

2. Ley General de Educación: Refiriéndose prevenir y eliminar barreras de aprendizaje y participación en la sociedad de las personas con discapacidad.

3. Plan Nacional de Desarrollo: Que propone un México Incluyente con equidad.

4. Acuerdo 592: Que articula la educación Básica y la aplicación de los planes y programas de estudio de educación secundaria.

5. Aprendizajes Clave para la Educación Integral: Que establece un currículo inclusivo acorde con la “Estrategia Nacional de Inclusión”.

6. Convención Sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad: Estableciendo facilitar el aprendizaje del LSM asegurando que la educación de sordos o sordociegos se imparta en los lenguajes, modos y medios de comunicación más apropiados que permita alcanzar su máximo desarrollo académico y social.

7. Ley General para la Inclusión de las Personas con Discapacidad: Que en su artículo 14 reconoce a la LSM como una lengua nacional y como parte del patrimonio lingüístico de México.

8. Ley para la Integración al Desarrollo de las Personas con Discapacidad del Distrito Federal: Integrando el desarrollo de estos mediante una participación.

9. Ley para Prevenir y Eliminar la Discriminación del Distrito Federal: Que describe los derechos, sanciones y formas de convivencia mediante el respeto.

El gobierno mexicano mediante la Secretaría de Educación Pública ha creado los Centros de Atención Múltiple (CAM) que atiende las necesidades de los alumnos que presentan discapacidad o trastornos y son regulados por la Educación Especial, la cual a pesar de contar con un Centro Digital de Recursos, este sólo cuenta con un Diccionario Español–Lengua de Señas Mexicana (Dielseme) de tipo estudio introductorio al léxico de la LSM y con dos diccionarios interactivos con sólo unas cuantas palabras de lenguaje matemático registradas en total.

Una de las propuestas de formalización del LSM es la publicada por el CONAPRED (2011) “Manos con Voz”[3], la cual cuenta con 240 páginas de las cuales sólo 13 son dedicadas a las matemáticas que comparte espacio con palabras “relacionadas” como “dólar”; sin embargo en estos centros no se promueve la integración e inclusión al estar separados de otros estudiantes; sin embargo se encontró que en 25 escuelas secundarias investigadas que al menos 2 contaban con al menos 1 alumno sordo, que sus profesores no se encuentran capacitados para atender a estos en LSM; se comunican por lenguaje escrito y les brindan menos contenidos.

En el 100% de los casos de docentes que atienden alumnos sordos secundarios y telesecundarias, así como autoridades de educación especial entrevistados aseguran que la SEP no

cuenta con un diccionario en LSM matemático establecido que contenga las palabras utilizadas en los planes y programas 2011 y del nuevo modelo educativo en nivel secundaria y aseguran que tampoco de primaria.

EL PROBLEMA DEL LENGUAJE

El proceso de enseñanza-aprendizaje con sus actores docente-discente es análogo al proceso de comunicación emisor-receptor en su primer estado -independientemente de los procesos de examinación y entrenamiento que se quieran considerar posteriores a esta fase inicial- por lo que una comunicación efectiva permitirá un “procesamiento correcto de información” de acuerdo con la teoría de la información de Shannon y Weaver en “*A Mathematical Theory of Communication*”[4] donde se establece los principios de que la información es independiente del contenido, se centra en la transmisión y su cantidad que se mide como el incremento de la eficacia -aprendizaje como retención correcta del mensaje transmitido para su procesamiento- en la transmisión de la información entre la emisión y la recepción de los mensajes - para simplificar la lengua de señas la dactilología no es viable y los ideogramas son el curso de acción óptimo respecto a los tiempos y movimientos kinestésicos utilizados por palabra- y su capacidad de canales de comunicación y codificación eficaz de los mensajes; por lo que para evitar una ambigüedad simbólica entre emisor-receptor se requiere un lenguaje libre de contexto, único y que permita la formalización del lenguaje matemático para lograr una comunicación efectiva.

El proceso de una lengua puede ser modelado mediante el “Sistema de procesamiento de información” de Newell y Simon [5] contiene los módulos de sistema sensorial -la vista que captura los movimientos kinestésicos denominados señas-, un conjunto de elementos denominados símbolos -LSM-, una “estructura simbólica” formada por un conjunto de símbolos conectados por un conjunto de relaciones -semántica del ideograma-, su conocimiento -memoria de estructuras simbólicas del ideograma- y un sistema de procesamiento.

Por otro lado, Lachman y Butterfield [6] consideran al procesamiento de información como operaciones simbólicas -por lo que los movimientos kinestésicos en el lenguaje de señas tienen un significado ideográfico con información- que cuenta con las características de codificación, comparación, localización y almacenamiento que forman un conocimiento.

Lo anterior requiere una precisión kinestésica de las señas utilizadas, un significado único -al no existir otra seña igual- y un establecimiento en la población a comunicarse -mexicana- mediante un diccionario finito que permita lograr una efectividad para que el significado produzca la reacción del receptor en el contexto matemático.; sistémicamente el circuito de efectividad comunicativa deberá contener entonces una fuente emisora de señas inicial, un transmisor kinestésico de señas ideográficas -las manos- en el espacio, un canal visual, un receptor con la capacidad decodificación semántica del mensaje transmitido utilizando un diccionario de símbolos -previamente aprendidos y exclusivos para ideas matemáticas- y un receptor del mensaje -alumno-; cabe mencionar que existe en medio de todo esto el ruido que rodea al emisor o receptor el cual puede alterar el mensaje durante su transmisión; el principal causante de esto es la falta de un lenguaje de señas formalizado matemático ya que ambos pueden tener diferente lengua.

El problema descrito tiene un principio de contexto social ya que existen más de 30 variantes de lenguas de señas, sólo

en la república mexicana; por lo que se requiere el establecimiento de una LSM matemático -sin excluir otras lenguas de señas- para lograr una efectividad comunicativa y cognitiva como se ha logrado con protocolos de comunicación como la IEEE o el reconocimiento de patrones kinestésicos de sensores como el Microsoft Kinect.

Bajo el contexto anterior se requiere urgentemente que la SEP diseñe, implante y establezca una LSM matemático mexicano que permita una comunicación formal matemática y la trascendencia de conocimientos superiores; de lo contrario se continuará incurriendo en una discriminación cognitiva que establece una barrera cognitiva y de un rezago académico en los estudiantes sordos al estar excluidos de una comunicación simbólico-matemática formal.

II. EL DICCIONARIO MATEMÁTICO EN LSM

Luria[7] se refiere al desarrollo lingüístico como el proceso por el cual el sujeto se va apropiando de un repertorio amplio y complejo del lenguaje permitiendo a la información ordenarla, sintetizarla, relacionarla, categorizarla y hacer deducciones sobre la información recibida para poder establecer conclusiones.

El niño sordo al igual que el oyente va adquiriendo palabras mediante crece y con el pasar del tiempo las va articulando hasta formar frases que le permiten lograr un relato; por lo que el lenguaje regula progresivamente la transición del conocimiento concreto al abstracto como sucede con las matemáticas.

Para Vygotsky[8] el lenguaje es un instrumento psicológico de la naturaleza que estudia los diferentes sistemas de signos que se poseen los humanos que transforma las aptitudes y habilidades de estos en funciones superiores, donde el significado de la palabra es una generalización de la comunicación y del pensamiento; de la misma forma para los sordos las señas son una generalización de conceptos, abstracciones o significados siendo de carácter social al formarse de acuerdo a las demandas de la comunicación en las que se presente el sujeto, la intervención y el empleo de signos que deba realizar para poder dar soluciones a los problemas que la evolución y el contexto guíe.

Por ello la importancia de proveer de estas nuevas señas a los alumnos que presentan alguna discapacidad auditiva que requieren conocimientos matemáticos de calidad demandados a su edad y requeridos para proseguir sus estudios mediante auxiliares como la APP y el diccionario matemático en Lengua de Señas Mexicana.

Los diccionarios nos proporcionan los significados de las palabras y en ocasiones cuentan con información adicional como su etimología, escritura, sinónimos y antónimos; por lo tanto, son un apoyo cognitivo que promueve el uso correcto del lenguaje.

Por otro lado, se debe tomar en cuenta que estos definen palabras de un idioma y este siempre está en constante evolución, por lo que estos permiten añadir palabras y su modificación en términos o definiciones; por lo que como docentes debemos preguntar si aprendemos de los diccionarios o nosotros somos quienes les enseñamos a ellos como deben definir nuestras palabras.

Se diseñó un diccionario de tipo híbrido (académico, especializado y visual) estableciendo con 150 señas de

geometría utilizadas en secundaria de las que carece la LSM al revisar libros aprobados por la SEP [1] [2].

En la figura 1 se describe la seña de radio creada para la LSM de esta propuesta, la cual es una seña bimanual (SB) ya que se articula con dos manos a la vez de manera simétrica y dispar; en estas tenemos una mano que será la dominante y la mano no dominante, considerándose también una seña icónica al copiar la peculiaridad del objeto del radio matemático y también estar compuesta de una seña inicializada o alfabética al aparecer la dactilología de la letra “r”, que es la letra en español con la que comienza la palabra matemática “Radio”. este elemento que con mayor frecuencia es cambiado por uno nuevo.



Fig. 1: Seña de la palabra matemática “Radio” en la APP.

III. APP

Se programó una APP en el lenguaje Xamarin acorde al diccionario de la propuesta la cual puede ser descargada en la Google Play Store con el nombre de “INCLUYEME Lengua de Señas Mexicana Matemáticas” por parte del Cuerpo Académico PRODEP ENSMEX-CA-2 la cual permite seleccionar 150 señas de geometría y en su descripción se presenta como una propuesta inclusiva de extensión matemática para la Lengua de Señas Mexicana y se encuentra categorizada en APP para educación.

La APP cuenta con una GUI con un menú slider intuitivo, como se describe en la figura 2; ya que en la parte lateral izquierda aparecen las palabras pudiéndose desplazar mediante la pantalla táctil hacia arriba y abajo por las 150 palabras y al tocar una de ellas, este reproduce el video correspondiente contando con un menú ocultable en la parte inferior de este para controlar el retroceso, avance o pausa; permitiendo al usuario observar indeterminadamente los videos para imitar las señas.

La APP también provee de la definición matemática y se adapta a diversos dispositivos móviles y posiciones mediante la lectura del sensor de orientación en tiempo real.

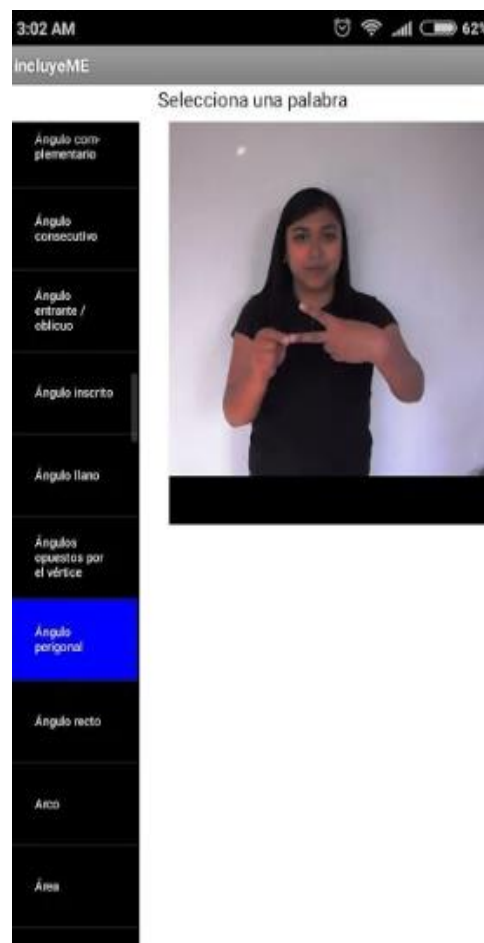


Fig. 2: GUI de la APP. Fuente: Google Play Store.

IV. EXPERIMENTACIÓN Y RESULTADOS.

Se actualizó la APP a las necesidades de lenguaje matemático de geometría que utilizarían los profesores de secundaria que trabajan con alumnos sordos en sus grupos para poder realizar las pruebas de campo.

Se seleccionó un universo de prueba para experimentar el proceso de alfabetización y comunicación efectiva de LSM mediante la EST No. 6 Sor Juana Inés de la Cruz, la cual cuenta con un salón especial con 15 alumnos sordos gestionado por el CAM de la Dirección General de Educación Especial y 35 alumnos oyentes que conviven con estos en receso para promover la inclusión de un grupo con otro.

Se desarrolló un ejercicio aplicado a ambas poblaciones y al solicitar comunicar los resultados entre ambas se observó que estas pudieron comunicarse efectivamente intercambiando al 100% los resultados de un ejercicio obteniendo una comprensión bidireccional al utilizar un lenguaje establecido, común y la APP como interfaz de aprendizaje.

En las entrevistas se obtuvo que ambas poblaciones consideran importante un diccionario para poder comprender o comunicar matemáticas; respecto a los alumnos en esta población se obtuvo un índice Likert del 95% respecto a la app y en el 100% aceptó la propuesta de las señas matemáticas.

El segundo universo de trabajo fue la telesecundaria 71 con un grupo de 20 alumnos, de los cuales 3 son sordos; se apoyó con el diseño de una planeación didáctica para la formalización del uso de las propiedades de congruencia y semejanza de triángulos en la resolución de problemas mediante materiales concretos y semiconcretos, obteniéndose

que la APP permitió la comunicación efectiva al 100% entre alumnos oyentes y sordos en un trabajo colaborativo utilizando los principios de las situaciones[9].

[11] <http://educacionespecial.sepdf.gob.mx/serviciosdf.aspx>(Recuperado 3 de noviembre de 2017 3:40 hrs)

[12] <https://copred.cdmx.gob.mx/storage/app/uploads/public/5ab/d11/984/5abd1198408cb449490320.pdf> (Recuperado el 10 enero de 2020 11:50 hrs)

V. CONCLUSIONES

En las entrevistas se obtuvo que ambos tipos de alumnos consideran importante un diccionario para poder comprender o comunicar matemáticas; respecto a los alumnos en esta población se obtuvo un índice Likert del 100% respecto a la app y en el 100% aceptó la propuesta de las señas matemáticas. En entrevista con el profesor, este consideró a la APP como “una herramienta excelente y necesaria para poder enseñar el contenido con este tipo de alumnos” solicitando que esta debe incluir a estos alumnos, contenidos y otras materias entre otras observaciones de expansión de esta. El Departamento de Investigación y Experimentación Educativa de la Escuela Normal Superior de México intentó formalizar el trabajo del diccionario y APP mediante la colaboración con la Dirección General de Educación Especial electrónicamente desde 2017; hasta el momento no se ha podido obtener una respuesta de autorización para práctica por escrito por parte de las autoridades de la DGE; sin embargo la experimentación informal arrojó resultados positivos en espera que las autoridades encargadas cumplan con su función [10] y que este trabajo sirva de marco referencial para desarrollar y formalizar el diccionario LSM matemático mediante su propuesta oficial en la SEP para poder cumplir con las leyes mencionadas [12] en este documento y lograr una verdadera educación inclusiva.

Actualmente la aplicación tiene más de 1000 descargas activas en uso desde su salida en la Google Play Store en enero de 2018 y más de 200 resultados de búsqueda en google de páginas que apuntan a la APP en el 2020.

La tesis “*Diseño en lsm de un diccionario matemático y app para la enseñanza de los criterios de congruencia y semejanza de triángulos en 3° grado de secundaria*” de la actualmente Lic. Eicka Viana Huihuitoa fue ganadora del 6to Concurso De Tesis Sobre Temas Vinculados Al Fenómeno Discriminatorio En La Ciudad De México COPRED [12].

REFERENCIAS

- [1] Secretaría de Educación Pública: *Plan de estudios 2011*: SEP (México, 2012)
- [2] Secretaría de Educación Pública: *Plan de estudios 2017*: SEP (México, 2017)
- [3] Serafin-Fleischmann, M. E., González-Pérez, R.: *Manos con voz : diccionario de lengua de señas mexicana*. CONAPRED. (México,2011)
- [4] Shannon, C. E. & Weaver, W.: *A Mathematical Theory of Communication*. (USA, 1949).
- [5] Newell, a., y Simon, H.: *A human problem solving*. Prentice-hall, englewood cliffs, p. 20, (USA.,1972).
- [6] Lachman, R.; Lachman, J., y Butterfield, E. C.: *Cognitive Psychology and Information Processing*, LEA, Hillsdale. (USA,1979)
- [7] Luria, A., R.: *Sensacion y percepción*, M.R. Editor (España, 1994).
- [8] Vygotski, L. S.: *instrumento y símbolo en el desarrollo del niño*, Desarrollo de los procesos superiores: Grijalbo. (España, 1979)
- [9] Brousseau, G: *Théorie des Situations Didactiques. La Pensée Sauryage. Grenoble*, (Francia,1998).
- [10] Diario Oficial de la Federación Ley General para la Inclusión de las personas con discapacidad. México (México, 2011)..

Cálculo combinatorio en la enseñanza de las matemáticas.

Nayeli Lopez Tailles

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco,
02420 CDMX, México.
nayelinsmm@gmail.com

Resumen- A través del cálculo combinatorio se propone determinar las formas en que se pueden representar, modelar y simular diferentes arreglos de elementos en un conjunto aleatorio y algunas aplicaciones con variaciones, permutaciones y combinaciones utilizando funciones; ya que el análisis combinatorio expresa un esquema operacional fundamental para el razonamiento lógico. Este tópico representa importancia en la enseñanza, donde los alumnos pueden realizar actividades características de matematización: hacer conjeturas, generalización, la optimización y el pensamiento sistemático.

Palabras Clave- combinatoria, variaciones, permutaciones, funciones, enseñanza de las matemáticas.

Abstract- Through combinatorial calculus, it is proposed to determine the ways in which they can represent, model and simulate different arrangements of elements in a random set and some applications with variations, permutations and combinations of functions; since combinatorial analysis expresses a fundamental operational scheme for logical reasoning. This topic represents importance in teaching, where students can perform characteristic mathematical activities: making guesses, generalization, optimization, and systematic thinking.

Keywords- combinatorial, variations, permutations, functions, maths teaching.

Mathematical Subject Classification: 97D50.

I. INTRODUCCIÓN

La combinatoria pertenece un área de las matemáticas discretas, en donde éstas se ocupan de estudiar las distintas configuraciones de conjuntos no continuos; es decir finitos o infinitos numerables, que pueden obtenerse, a partir de sus elementos dados mediante ciertas transformaciones que originan cambios en la estructura o la composición de estos. La estructura de estos conjuntos puede ser muy compleja dependiendo de las relaciones existentes entre sus elementos que asignan como resultado diferentes permutaciones, combinaciones y variaciones[1].

El diseño y aplicación del cálculo combinatorio permite orientar el proceso de enseñanza-aprendizaje a través de situaciones reales; así mismo contribuye al desarrollo del pensamiento sistémico en el que le permite abordar todos los elementos que lo componen y las relaciones entre ellos; su enumeración, construcción de algoritmos y la abstracción de las propiedades que satisfacen ciertas condiciones establecidas[2]. Una de las funciones de la matemática es modelar procesos y fenómenos de la realidad, algunos de ellos son de tipo aleatorio y es en la resolución de problemas combinatorios donde generalmente se debe examinar todas las posibilidades para llegar a una generalización[3].

La combinatoria ha ganado mucha importancia debido a sus amplias aplicaciones en la teoría de probabilidades, estadística, teoría de números, lógica, informática y teoría de grafos. El objeto de estudio de la combinatoria ha evolucionado con el tiempo, actualmente el análisis combinatorio busca encontrar los principios y teorías unificadoras que permitan ordenar y sistematizar el gran número de resultados existentes aparentemente dispersos e inconexos y sin relación[3].

El presente trabajo recapitula los orígenes de la combinatoria en donde subyacen las primeras nociones y conceptos básicos del cálculo combinatorio gracias a los trabajos de grandes matemáticos en el mundo antiguo y su crecimiento acelerado a partir de la segunda mitad del siglo XX. Expone un marco teórico sobre las bases de la combinatoria y propone problemas didácticos a partir de funciones inyectivas para la aplicación real de permutaciones, variaciones y combinaciones. Mediante el Aprendizaje Basado en Problemas se presentan situaciones reales, donde se puede realizar conjeturas y estrategias de solución para estos tópicos.

Uno de los conceptos torales dentro de la combinatoria es el de coeficiente binomial (n,r) el cual cuenta el número de subconjuntos de r elementos de un conjunto de n elementos. La teoría desarrollada para este concepto es basta y fructífera en aplicaciones. Dentro de esta resaltan las identidades combinatorias, las cuales son igualdades que contienen coeficientes binomiales[1].

II. ORÍGENES DE LA COMBINATORIA

El estudio de la combinatoria se desarrolló paralelamente con el de otras ramas de la matemática, tales como el álgebra y teoría de números, ya que sus primeros hallazgos datan de China en el siglo XXII. Los cuadrados mágicos son ejemplos de los más antiguos que existen sobre problemas de combinatoria[4]; éstos aparecen y fueron la base del famoso libro místico chino I – Ching (易经) hacia 1200 A.C[5]. Es importante resaltar que los cuadrados mágicos inscritos en el caparazón de una tortuga son un arreglo de elementos de un conjunto finito que responde a una determinada condición, cuya base combinatoria consta de 64 hexagramas que muestran todas las permutaciones posibles de dos tipos de líneas, al tomarlas de seis en seis[5].

Por otro lado el escrito Chino Pa Kua (八卦) es otro ejemplo de los más antiguos libros en donde se exhiben

problemas sobre el cálculo combinatorio mediante el número de permutaciones de una serie de segmentos dispuestos alrededor de un círculo [6].

En el libro chino el precioso espejo de los cuatro elementos (四个元素的珍贵镜子) de Zhu Shijie en 1303, aparece un diagrama conocido como el triángulo aritmético, en el que se presentan diferentes desarrollos binomiales hasta la potencia octava, así como el desarrollo de series y progresiones[7].

Otro encuentro del concepto de permutación se encuentra en la obra Hebrea de Sefer Yetzirah, un manuscrito elaborado entre el año 200 y 600; aunque tiempo atrás, Xenocrates de Calcedonia (96 314 a.C) habría propuesto la solución[8].

En el mismo siglo XXII el matemático Hindú Bhaskara comienza a explorar este campo; en el primer volumen de su obra principal el Siddhanta Shiromani (1150) donde publica el tratado Līlāvati dedicado a la combinatoria en el cual vislumbra el problema de la distribución de objetos o partición de conjuntos y enuncia una regla para hallar el número de colocaciones de n cosas de una clase y $(m-n)$ de otra[9].

El matemático y astrónomo judío Levi Ben Gerson en su libro De harmonicis numeris (1343) realizó un estudio más detallado de las permutaciones, arreglos y combinaciones de un conjunto de objetos argumentando la igualdad del número de colocaciones de n cosas de una clase K ; la cual implícitamente se encierra el modelo de partición de un conjunto [10].

Por otro lado; el término “coeficiente binomial” fue introducido realmente por Michel Stifer (1486-1567) en su obra Arithmetica Integra (1544) indicando los coeficientes binomiales hasta el orden $n=17$ [11].

Tartaglia en su libro Trattato di numeri et misure (1560) introdujo un triángulo que proporciona una regla para calcular combinaciones; ya que fue el primero en ocuparse del recuento del número de combinaciones diferentes en el juego de dados[12].

Tiempo después Gerolamo Cardano en su libro Liber de ludo aleae (1663) constituye el primer tratado serio de probabilidad abordando métodos de cierta efectividad en la combinatoria a partir de juegos de azar y deduciendo los coeficientes de $(a+b)^n$; dando como resultado que el número de combinaciones de n elementos tomadas era $(a+b)^2$ terminando con la solución a la ecuación cúbica[13].

Las contribuciones de Fermat y Pascal dan un giro al trasfondo relevante de la combinatoria, siendo a través de los juegos de azar donde se visualizan los principios para determinar el número de combinaciones de elementos de un conjunto finito; en particular sobre el problema de la división de la apuesta planteado por el caballero de Meré[14].

Los matemáticos anteriormente descritos reconocen el análisis combinatorio como un nuevo campo de la matemática digno de un estudio formal; dejando ver a ésta como el dominio de un conjunto de técnicas o prácticas en la solución de una tipología de problemas.

En el libro Traité du triangle arithmétique (1653) Pascal publica un tratado acerca de las relaciones entre los coeficientes binomiales, las combinaciones y los polinomios; además demostró la identidad de Pascal donde expresa la suma de potencias de los primeros n números naturales [15].

Aunque Pascal y Fermat no expusieron sus resultados de los juegos de azar; más tarde en el libro De Ratiocinnis in ludo aleae de Huygens (1657) resolvió algunos problemas propuestos por ellos [16].

El primero en introducir el término “combinatoria” es Gottfried Leibniz en su obra Disertatio de arte combinatoria (1666); además realiza la construcción sistemática del conocimiento combinatorio que se había obtenido hasta la época[17].

Posteriormente Bernoulli en la obra Ars Conjectandi (1713) incorporó temas combinatorios fundamentales como la teoría de permutaciones y combinaciones; así como la derivación, las propiedades de los números, definió la combinatoria como el arte de enumerar todas las formas posibles en las que un número determinado de objetos n puede combinarse y demostró el teorema binomial para el caso n entero positivo mediante el uso de la fórmula para las combinaciones[18].

El símbolo (n, k) se introdujo en el siglo XIX cuando fue utilizado por Andreas Von Ettinghausen en 1878[4].

Tiempo después Abraham de Moivre publica su obra llamada "The Doctrine of Chance" (1718); considerado clave para el principio del estudio de la probabilidad [19].

Posteriormente Pierre Simon Laplace recopiló las ideas de Jacob Bernoulli, Abraham de Moivre, Thomas Bayes y Joseph Lagrange en su obra Théorie Analytique des Probabilités (1812) donde hace un extraordinario trabajo sobre el desarrollo de la teoría de la probabilidad; siendo la base matemática para desarrollar el análisis combinatorio[20].

La combinatoria entró en un periodo exponencial de desarrollo con el crecimiento de problemas de la matemática discreta que coadyuvaban esta rama.

Las aportaciones de Galois(1831) fueron fundamentales para su investigación en teoría de grupos sobre permutaciones de las raíces de una ecuación polinómica[21].

Euler por su parte gracias a su célebre problema matemático de los siete puentes de Königsberg resuelto en 1736 dio origen a grandes resultados en combinatoria y teoría de grafos; así como el diseño de experimentos estadísticos [22].

F.P.Ramsey descubrió un importante teorema combinatorio de existencia (1930) trabajando en el contexto de la lógica de la matemática [23]. En la década de 1930 Paul Erdős y otros matemáticos húngaros dieron un nuevo impulso a la combinatoria [24].

En el libro Los fundamentos de la Teoría de la Probabilidad (Основы теории вероятностей) de Kolmogórov (1933) estructura el sistema axiomático y formalizado de la teoría de la probabilidad utilizando la teoría de conjuntos [25].

Años después en la revista acta mathematica Polya escribe un artículo titulado enumeración combinatoria para grupos, grafos y compuestos químicos (1937), desarrollando una poderosa técnica para resolver problemas de enumeración; su método está basado en la teoría de grupos y ha tenido gran influencia en el desarrollo contemporáneo de la teoría combinatoria[26].

En los últimos años la combinatoria entró en un período de intenso desarrollo relacionado con el crecimiento general del interés hacia los problemas de la matemática discreta ejemplos de tales teorías son: las funciones multiplicativas estudiadas en teoría de números y combinatoria, introducidas en 1832 por el matemático alemán August Ferdinand Möbius[27].

Hassler Whitney (1933) a partir de su trabajo en teoría de gráficos sentó las bases del matroide, una noción fundamental en combinatoria y teoría de la representación moderna[28].

Las tablas de Young en 1900 sirvieron como objeto combinatorio relacionado con la teoría de representaciones y funciones simétricas. Al mismo tiempo tiene lugar un gran desarrollo de las ramas más ricas en aplicaciones inmediatas, tales como la optimización en situaciones aleatorias reales de combinatoria [29].

En el libro Principles of combinatorics (Berge, 1968) propone describir la combinatoria como el estudio de las configuraciones formadas con los elementos de un conjunto; entendiendo por tales las aplicaciones del conjunto en otro, posiblemente provisto de cierta estructura que satisfagan unas restricciones determinadas [30].

Es en el siglo XX con el advenimiento de las computadoras que fue posible el análisis sistemático de los procesos y los algoritmos utilizados para generar permutaciones y combinaciones masivas. Además el análisis combinatorio busca principalmente determinar la existencia de configuraciones finitas y, si existen, encontrar el número posible de tales configuraciones [4].

III. TEORÍA DE CONJUNTOS

En el siglo XIX emerge la teoría de conjuntos gracias a los estudios de George Cantor (1845 – 1918). A través de la teoría de conjuntos se inicia el estudio formal de los subconjuntos y partir de estos viene ligado el problema de demostrar la existencia de subconjuntos de elementos de un conjunto finito dado y que satisfacen ciertas condiciones. Entonces se podría decir que la teoría de conjuntos con el formalismo moderno puede ser otra presentación del conteo hacia la combinatoria[31].

Un conjunto es una colección de objetos considerada como un todo, estos objetos se llaman elementos que cumplen una propiedad; se dice entonces que un conjunto es una multiplicidad considerada como la unidad $\{A_1, A_2, A_3, A_n\}$ [32].

Existen dos formas de asignar los conjuntos; extensión y por comprensión, para expresar que el conjunto K consta de los elementos $\{a, b, c\}$ escribimos $K = \{a, b, c\}$; con ello se da la **extensión** del conjunto K al enunciar cada una de las unidades que lo componen, este método es el más frecuente al designar para pocos elementos. Por otra parte los conjuntos infinitos solo pueden definirse por **comprensión**; es decir dando un criterio que permita reconocer para cada elemento si pertenece o no al conjunto[33].

Los axiomas formulados por Ernst Zermelo y Adolf Fraenkel, en 1908, son un sistema axiomático concebido para formular la teoría de conjuntos[31].

$$\text{Axioma de extensionalidad.} \\ \forall a(a \in X \leftrightarrow a \in Y) \leftrightarrow X = Y \quad (1)$$

$$\text{Axioma del conjunto vacío.} \\ \exists \emptyset \mid \forall a(a \notin \emptyset) \quad (2)$$

$$\text{Axioma del conjunto pares} \\ \forall x, y \mid \exists z; \forall a(a \in z \leftrightarrow a = x \vee a = y) \quad (3)$$

$$\text{Axioma del conjunto unión.} \\ \forall x \mid \exists y \forall a(a \in y \leftrightarrow \exists z(z \in x \wedge a \in z)) \quad (4)$$

$$\text{Axioma del conjunto potencia.} \\ \forall x \mid \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \forall a(a \in z \rightarrow a \in x)) \quad (5)$$

$$\text{Esquema axiomático de especificación} \\ \forall x \mid \exists y \forall a(a \in y \leftrightarrow a \in x \wedge (a)) \quad (6)$$

$$\text{Esquema axiomático de reemplazo} \\ \forall a, \exists b \mid (\forall x \in a \exists y \in b \wedge (x, y)) \quad (7)$$

$$\text{Axioma de infinitud.} \\ \exists x \mid \emptyset \in x \wedge (\forall y \in x: S(y) \in x) \quad (8)$$

$$\text{Axioma de regularidad.} \\ \forall x \in y \mid y \in x \wedge x \cap = \emptyset \quad (9)$$

$$\text{Lema de Zorn} \\ \forall x \exists f: x \rightarrow \bigcup x \forall a(a \in x \wedge a \neq \emptyset \rightarrow f(a) \in a) \quad (10)$$

Definición: La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto;

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \quad [32] \quad (11)$$

$$A \subset A \cup B \subset A \cup B; \quad (12)$$

Definición: La intersección de los conjuntos A y B es el conjunto:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \quad [32] \quad (13)$$

$$A \cap B \subset A, A \cap B \subset B \quad (14)$$

Se cumplen las siguientes Propiedades para la unión e intersección de dos conjuntos cualesquiera[33]:

$$\text{Conmutativa de la unión:} \\ A \cup B = B \cup A \quad (15)$$

$$\text{Asociativa de la unión:} \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (16)$$

$$\text{Conmutativa de la intersección:} \\ A \cap B = B \cap A \quad (17)$$

$$\text{Asociativa de la intersección:} \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad (18)$$

$$\text{Distributiva de la intersección:} \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (19)$$

$$\text{Distributiva de la unión:} \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (20)$$

$$\text{Idempotente en la unión:} \\ A \cup A = A \quad (21)$$

$$\text{Idempotente en la intersección:} \\ A \cap A = A \quad (22)$$

$$\text{Elemento neutro unión:} \\ A \cup \emptyset = A \quad (23)$$

Elemento neutro de la intersección:

$$A \cap U = A \quad (24)$$

En caso contrario cuando un conjunto A no esté contenido en otro conjunto B se tiene:

Inverso de la unión:

$$A \cup \bar{A} = U \quad (25)$$

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \neg(A \subseteq B); \Leftrightarrow \neg[\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)]; \Leftrightarrow \exists x: [\neg(x \in A \Rightarrow x \in B)]; \Leftrightarrow \exists x: [\neg(\neg(x \in A) \vee (x \in B))]; \Leftrightarrow \exists x: [\neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)]; \Leftrightarrow \exists x: (x \in A \wedge x \notin B). \quad (40)$$

Elemento inverso de la intersección:

$$A \cap \bar{A} = \emptyset \quad (26)$$

Si $A \subseteq B$ y además B tiene un elemento que no está en A, diremos que A está estrictamente incluido en B o que A es un subconjunto propio de B y se denota por:

Dominación

$$A \cup U = U \quad (27)$$

De (32) se deduce $A \subset B$. $A \subset B \Leftrightarrow$

$$A \subseteq B \wedge [\exists x: (x \in B \wedge x \notin A)] \quad (41)$$

Dominación

$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad (28)$$

Sea U el conjunto universal y A un conjunto cualquiera.

$$A \subseteq U; x \in A \Leftrightarrow x \in U, \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in U) \therefore A \subseteq U.$$

Absorción en la unión:

$$A \cup (A \cap B) = A \quad (29)$$

Sea A un conjunto cualquiera; entonces:

$$\emptyset \subseteq A; x \in \emptyset \Leftrightarrow x \in A, \forall x (x \in \emptyset \Leftrightarrow x \in A) \therefore \emptyset \subseteq A \quad (42)$$

Absorción intersección:

$$A \cap (A \cup B) = A \quad (30)$$

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera de un universal arbitrario U:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \vee B \subseteq A.$$

Sea X el conjunto universal y A un conjunto arbitrario el **complemento** del conjunto A es el conjunto:

$$A^c = \{x | x \in X, x \notin A\} [32] \quad (31)$$

Siendo demostrado como:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A;$$

$$(A = B \Leftrightarrow A \subseteq B) \wedge (A = B \Leftrightarrow B \subseteq A)$$

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A;$$

$$\text{"Si." } A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Leftrightarrow A = B:$$

Propiedades:

$$(A^c)^c = A \quad (32)$$

$$A \cup A^c = X \quad (33)$$

$$A \cap (A^c) = \emptyset \quad (34)$$

De Morgan:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad (35)$$

En efecto, $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Leftrightarrow$

$$[(\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)) \wedge (\forall x (x \in B \Rightarrow x \in A))];$$

$$A = B$$

$$(43)$$

De Morgan:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad (36)$$

Sean A, B y C tres conjuntos cualesquiera de un universal arbitrario U.

Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$; entonces: $A \subseteq C$ [32].

La diferencia entre los conjuntos:

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\} \quad (37)$$

Sea x un elemento arbitrario del universal U de $A \subseteq B$, se sigue que:

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

$$\text{De } B \subseteq C, \therefore x \in B \Rightarrow x \in C.$$

$$x \in A \Leftrightarrow x \in C$$

$$\forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in C) \therefore A \subseteq C$$

$$\text{De (1) } A = B \Leftrightarrow \forall x [(x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)] \quad (44)$$

Si:

$$A - B = A \cap B^c \rightarrow A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C) \quad (38)$$

Demostración:

$$A - (B \cap C) = A \cap (B \cap C)^c = (A^c \cup (B \cap C))^c;$$

$$= ((A^c \cup B) \cap ((A^c \cup C))^c = (A^c \cup B)^c \cup (A^c \cup C)^c;$$

$$(A \cap B^c) \cup (A \cap C^c) = (A - B) \cup (A - C).$$

V. FUNCIONES

Definición:

Sean A y B dos conjuntos. El producto cartesiano de A y B denotado por $A \times B$ es el conjunto:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\} [34] \quad (45)$$

Dada una pareja ordenada se tiene por definición $(a, b) \in A \times B \Leftrightarrow (a \in A \wedge b \in B)$ y sean X y Y conjuntos [32].

Una relación R de X en Y es una pareja ordenada $(R, X \times Y)$ donde $R \subseteq X \times Y$.

IV. SUBCONJUNTOS

Sean A y B dos conjuntos. Donde A está contenido en B o que es un subconjunto de B, y lo notaremos por $A \subseteq B$, si cada elemento de A es un elemento de B; es decir, $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x; (x \in A \Rightarrow x \in B)$. También puede decirse que B contiene a A:

$$B \supseteq A. [33] \quad (39)$$

Si R es relación X en $Y=(x,y)$ [32].

Una función es una relación binaria F que está sujeta a ciertas condiciones y es uno de los conceptos de relevancia en matemática. Las funciones permiten conocer propiedades de conjuntos a través de otros mediante la propiedad:

$$F: \{\forall x \in \text{dom}(F) \exists y | < x, y > \in F\} [34]. \quad (46)$$

Se denota como $y=F(x)$; $\therefore \text{Im}(F) = \{F(x) | x \in \text{Dom}(F)\}$, se dice que F es función de A en B y se escribe: $F: A \rightarrow B$.

Si $\text{Dom}(F) = \{A, \text{Im}(F) = F[A] \subseteq B \forall F\}$ es una función y se indica que B es el codominio o contra dominio de F ; ya que $\text{Im}(F) \subseteq B$ entonces el contradominio de una función es cualquier conjunto que contenga a la imagen.

En otras palabras una función de F de $A \rightarrow B$ es una correspondencia entre elementos de A y elementos de B tal que a cada elemento de A le corresponde un único elemento de y [32].

Para cada conjunto $X, \forall x = \{(x, x) | x \in X\}$ es una función de x en x , llamada función identidad. Sean X, Y dos conjuntos donde $y_0 \in Y$ un elemento fijo $F = \{(x, y_0) | x \in X\}$ es una función de X en Y llamada función constante.

F es uno a uno o inyectiva $\leftrightarrow y \in \text{Im}(F) \exists x | < x, y > \in F : F(x) = y \rightarrow x, z \in \text{Dom}(F) \text{ y } x \neq z \rightarrow F(x) \neq F(z)$;
o bien si:
 $\{x, z \in \text{Dom}(F) \wedge F(x) = F(z) \rightarrow x = z\}$ [35].

Una función $F: X \rightarrow Y$ es suprayectiva si la: $\text{Im}(F) = Y$.

Debido que para cualquier función $F: X \rightarrow Y$ siempre se tiene que $\text{Im}(F) \subseteq Y$ será razón suficiente que $Y \subseteq \text{Im}(F) \subseteq \rightarrow \forall y \in Y \exists x \in X | F(x) = y$.

Una función es biyectiva si $\leftrightarrow$ es inyectiva y suprayectiva, donde todo elemento del codominio de una función F es imagen de un solo elemento del dominio de la función [34].

Principio aditivo y multiplicativo:

Estos dos principios son los dos más fundamentales para el conteo y el análisis combinatorio. Algunos autores toman estos principios como parte de los axiomas del análisis combinatorio [36].

Teorema 1.2.1 (principio aditivo):

Sean A y B dos conjuntos finitos disjuntos, es decir $A \cap B \neq \emptyset$; $\rightarrow |A \cup B| = |A| + |B|$. $\neq \emptyset$; si un suceso A puede ocurrir de n maneras y otro suceso B puede ocurrir de m maneras y no pueden ocurrir ambos simultáneamente; entonces el suceso A o B puede ocurrir de $m+n$ maneras [37].

Demostración:

Séase $|A| = n$ y $|B| = m$ existe una biyección en A y $\mathbb{N}_n$ y otra biyección entre B y $\mathbb{N}_m$. Por lo tanto $|A| + |B| = m + n$ existe una biyección entre $A \cup B$ y $\mathbb{N}_{m+n}$.

Sea $h: A \cup B \rightarrow \mathbb{N}_{m+n}$

$$h(x) = \begin{cases} h(i) & \text{si } i \leq n \\ g(i - m) & \text{si } m < i \leq m + n \end{cases}$$

$$f: \rightarrow \mathbb{N}_n \rightarrow A \wedge g: \rightarrow \mathbb{N}_m \rightarrow B. : |A| + |B| = m + n$$

Teorema 1.2.2 si $A_1, \dots, A_n$ son conjuntos finitos disjuntos a pares $n > 1$, $\rightarrow$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|.$$

Demostración por inducción:

En el caso de $n=2$, $\rightarrow |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| \rightarrow$ si se toma $B = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \rightarrow B \cap A_{n+1} = \emptyset \therefore |B \cup A_{n+1}| = |B| + |A_{n+1}| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| + |A_{n+1}|.$

Ley de la tricotomía

Dado dos números reales a y b se cumple una justamente una de las siguientes propiedades [35] $a < b$; $a = b$; $a > b$.

Teorema 1.3 (principio multiplicativo) sean A y B conjuntos finitos cualesquiera $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\} \rightarrow |A \times B| = |A| \cdot |B|$ [36].

Demostración:

Sean $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ el producto cartesiano en una matriz $A \times B$. Si se tienen dos conjuntos de k y n elementos respectivamente y queremos escoger dos elementos de modo que uno sea del primero y el otro del segundo, se puede hacer de $k \times n$ maneras [37].

Debiendo:

$$\begin{pmatrix} (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & \dots & (a_1, b_m) \\ (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & \dots & (a_2, b_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n, b_1) & (a_n, b_2) & \dots & (a_n, b_m) \end{pmatrix}$$

La cual es de dimensión $n.m = |A| \cdot |B|$

Teorema 1.3

Sean $\{A_1, \dots, A_n\}$ conjuntos finitos cualesquiera $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|$

Demostración por inducción sobre n sea: $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|$ siendo $B = A_1 \times \dots \times A_n \rightarrow B \times A_{n+1} = |B| \cdot |A_{n+1}| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n| \cdot |A_{n+1}|$

Si un objeto puede escogerse entre m posibles:

Principio de inclusión exclusión:

Sean A y B dos conjuntos finitos:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Si tenemos la colección $A_i (1 \leq i \leq n)$ [36].

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{\substack{i,j,k: \\ 1 \leq i < j \leq n}} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{\substack{i,j,k: \\ 1 \leq i < j < k \leq n}} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n|$$

VI. CÁLCULO COMBINATORIO

Permutaciones

Una permutación de algunos objetos es un ordenamiento o arreglo lineal particular de los objetos: $P(n, k)$ y cuenta dos cosas simultáneamente: la cantidad de formas de elegir y ordenar k de n objetos[39]. Un caso especial útil es $k = n$ en el que simplemente estamos contando el número de formas de ordenar todos los n objetos; esto es: $n(n-1) \dots (n-n+1) = n!$, lo anterior se formaliza con el uso del lenguaje de las funciones matemáticas: como una función biyectiva de I_n en un conjunto de n elementos. Si A es un conjunto finito, toda función inyectiva de A en A es biyectiva[36].

Sea $A = \{a_1 \dots a_n\}$; $F: A \rightarrow A$ es una permutación de A , en estas permutaciones intervienen todos los elementos. El número de permutaciones de n objetos diferentes tomados de r en r está dado por la fórmula:

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1), r \leq n.$$

El número total de permutaciones de n objetos diferentes tomados de n en n está dada por:

$$P(n, n) = n(n-1)(n-2) \dots 1 = n![38].$$

Permutaciones con repetición: se llama permutación con repetición de n elementos distribuidos en k grupos de $\{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k\}$ elementos indistinguibles $\{a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + a_k = n\}$, las configuraciones con n elementos excluyendo las reordenaciones son:

$$PR_n^{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k} = \frac{n!}{a_1! a_2! \dots a_{k-1}! a_k!} [39].$$

Permutaciones circulares:

Una permutación circular de orden $r \leq n$ de n objetos es una disposición de r en r , posiciones en la circunferencia. En r elementos de $\binom{n}{r}$ son las formas distintas de colocarlos, con los elementos:

$a_{f(1)}, a_{f(2)}, \dots, a_{f(r)}$ tendremos $r!$ configuraciones en la circunferencia, al trasladar los elementos una posición a la derecha se tiene:

$$\begin{aligned} a_{f(1)} a_{f(2)} \dots a_{f(r)} &= a_{f(2)} a_{f(3)} \dots a_{f(1)} = \\ a_{f(r)} a_{f(1)} \dots a_{f(r-1)} &\therefore \\ \binom{n}{r} \frac{r!}{r} &= \binom{n}{r} (r-1)! [36]. \end{aligned}$$

Combinaciones

Se llaman combinaciones de elementos $A = \{a_1 \dots a_n\}$ tomados de n en n a los subconjuntos de n elementos del conjunto A se denota como:

$$C(n, m) = C\binom{n}{m} \text{ donde } 0 \leq m \leq n.$$

Para calcular $C\binom{n}{m}$ se busca cada aplicación inyectiva $f: N_m \rightarrow m \subset A = S\{f(1), f(2) \dots, f(k)\}$ [38].

También cada uno de los diferentes grupos tomando todos o parte de los elementos del conjunto, sin considerar el orden de los elementos tomados, se les llama combinación.

El número de combinaciones de n objetos diferentes tomados de r en r está dado por $C(n, r) = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)}{r!}$ $r \leq n$ multiplicando por $\frac{(n-r)!}{(n-r)!}$

Se obtiene:

$$C(n, r) = \frac{n(n-1) \dots (n-r+1) \dots \dots \dots (n-r)!}{r! (n-r)!}.$$

El número de combinaciones de n elementos diferentes tomados de r en r puede obtenerse:

$$C(n, r) = \frac{n!}{r! (n-r)!} \quad r \leq n [38].$$

Combinaciones con repetición:

Sea $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un conjunto de n elementos. Una combinación con repetición de n elementos tomados de k en k este conjunto equivale a una lista ordenada de longitud k donde estos se pueden repetir y existe una correspondencia entre las combinaciones de orden k y las soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = k$ cada $x_i \geq 0$ es a_i es una función biyectiva $CR(n, k) = \binom{n+k-1}{k}$.

Si $n, k > 0 \rightarrow CR(n, k) = CR(n-1, k) + CR(n, k-1)$;

$$CR(n, 1) = n \wedge CR(1, k) = 1$$

$\exists a_1$, se toma elementos de $k-1$ en $k-1$.

$$CR(n, k) = CR(n-1, k) + CR(n, k-1).$$

Si $k \neq 1, n \neq 1$;

$$CR(n, 1) = n \wedge CR(1, k) = 1$$

$$CR_k^n = R_{k+n-1}^n = \binom{k+n-1}{n} = \frac{(k+n-1)!}{n!(k-1)!} [39].$$

Variaciones

Sea X un conjunto de k elementos y otro conjunto Y de n elementos:

$$S = \{f: X \rightarrow Y; f \text{ inyectiva}\};$$

la aplicación de la función es:

$$f(x_1), f(x_2) \dots \dots \dots f(x_n) \rightarrow f(x_1) \in Y.$$

$$f(x_2) \in Y \setminus \{f(x_1)\} = \{y \in Y; y \neq f(x_1)\}$$

$$f(x_3) \in Y \setminus \{f(x_1), f(x_2)\} =$$

$$\{y \in Y; y \neq f(x_1), y \neq f(x_2)\}$$

$$f(x_k) \in Y \setminus \{f(x_1), \dots, f(x_{k-1})\} =$$

$$\{y \in Y; y \neq f(x_1) \dots, \neq f(x_{k-1})\}$$

El total de aplicaciones biyectivas de $X \rightarrow B$ se llaman variaciones de n elementos tomados de k , por el principio del producto:

$$V(n, k) = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} [38].$$

Variaciones con repetición:

Sea un conjunto de m elementos con la notación:

$C = \{c_1, c_1, \dots, c_m\}$ se pueden formar; $X_n = \{(c_{i1}, c_{i1}, \dots, c_{in}): c_{i1} \in C, j = 1, \dots, n\}$ el número de elementos de X_n con repetición de m elementos tomados de n en n : $X_m = m^n$ [39].

El factorial de un entero positivo n lo describe Christian Kramp en 1808[40] como:

Para cada $n \in \mathbb{N}$ factorial será $n! =$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)n = \prod_{k=1}^n k;$$

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ n-1! \cdot n & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Propiedades

$$n! = n(n-1)!; n \geq 2;$$

$$\text{Si } n! = m!; \Leftrightarrow n = m \forall n, m \in \mathbb{Z}^+ - \{1\};$$

$$n(n!) = (n+1)! - n!$$

Teorema del binomio

El desarrollo de la potencia n -ésima (siendo n , entero positivo) de un binomio[37].

$$\text{Sea } 1 \leq m \leq n-1 \rightarrow C\left(\begin{matrix} m \\ n-1 \end{matrix}\right) + C\left(\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right) = C\left(\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right).$$

Demostración:

$$\begin{aligned} & C\left(\begin{matrix} m \\ n-1 \end{matrix}\right) + C\left(\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right) = \frac{(n-1)!}{m!(n-1-m)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-1-(m-1))!} = \\ & \frac{(n-1)!}{m!(n-1-m)!} + \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} = \\ & \frac{(n-1)!(n-m)}{m!(n-m)!} + \frac{(n-1)!m}{m!(n-m)!} = \frac{(n-1)!(n-m) + (n-1)!m}{m!(n-m)!} = \\ & \frac{n!}{m!(n-m)!} = C\left(\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right). \end{aligned}$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, y cualesquiera números reales a, b se tiene que: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} \cdot b^i$.

Demostración por inducción sobre n :

$$\begin{aligned} n=0, (a+b)^0 &= 1 \wedge \sum_{i=0}^0 C_0^i a^{0-i} \cdot b^i = C_0^0 a^0 \cdot b^0 = \\ 1 \cdot (a+b)^0 &= \sum_{i=0}^0 C_0^i a^{0-i} \cdot b^i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Para } n-1 \geq 0, (a+b)^{n-1} &= \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i a^{n-1-i} \cdot b^i \\ (a+b)^n &= (a+b)(a+b)^{n-1} \\ &= (a+b) \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i a^{n-1-i} \cdot b^i \\ &= a \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i a^{n-1-i} \cdot b^i + b \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i a^{n-1-i} \cdot b^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i a^{n-1} \cdot b^i + \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i a^{n-1-i} \cdot b^{i+1} \end{aligned}$$

Como:

$$C_{n-1}^n = 0 \rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i a^{n-i} \cdot b^i = \sum_{i=0}^n C_{n-1}^{i-1} a^{n-i} \cdot b^i$$

Se define:

$$\begin{aligned} C_{n-1}^{n-1} &= 0 \rightarrow (a+b)^n \sum_{i=0}^n C_{n-1}^i a^{n-i} \cdot b^i + \sum_{i=0}^n C_{n-1}^{i-1} a^{n-i} \cdot b^i \\ &= \sum_{i=0}^n (C_{n-1}^i + C_{n-1}^{i-1}) a^{n-i} \cdot b^i \\ \therefore (a+b)^n &= \sum_{i=0}^n C_n^i a^{n-i} \cdot b^i \end{aligned}$$

Coefficiente binomial

El número de subconjuntos de k elementos a partir de un conjunto n se denota $\binom{n}{k}$. Los números $C_{(n,k)}$ se conocen como coeficientes binomiales donde $C_{(n,k)} = 0$; si $k > n$:

$$\begin{aligned} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots \dots \dots (n-k) + 1; \binom{n}{k} &= \\ \frac{n(n-1)(n-2) \dots \dots \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \dots \dots (k-1) \cdot k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}. \end{aligned}$$

El cuál es el coeficiente del termino $x^{n-k}y^k$ obtenido al desarrollar $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k}y^k$.

En el libro "raité du triangle arithmétique" (Pascal, 1654) estudia lo que hoy se conoce como triángulo de Pascal que es un arreglo de números donde la posición k en la fila n del triángulo de Pascal es igual al coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ [36].

Cumple con las siguientes propiedades[37]:

Sean $\forall n, k \in \mathbb{Z}^+ | n \geq k$:

$$\begin{aligned} \cdot \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k}; \\ \cdot \binom{n+1}{k+1} &= \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}; \\ \cdot k \binom{n}{k} &= n \binom{n-1}{k-1}; \\ \cdot k \binom{n}{k} &= (n-k+1) \binom{n}{k-1}; \\ \cdot \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots \dots \dots + \binom{n+k}{k} &= \binom{n+k+1}{k+1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \dots \dots \dots + \binom{n+k}{n} &= \binom{n+k+1}{n+1}; \\ \cdot \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots \dots \dots \binom{n}{n} &= 2^n; \\ \cdot \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} &= 0 \end{aligned}$$

VII. DIDÁCTICA DE LA COMBINATORIA MEDIANTE APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS (ABP)

A través del enfoque didáctico ABP se proponen problemas combinatorios, donde se pretende desarrollar habilidades cognitivas como; conjeturas, generalización la optimización y el pensamiento sistemático, además habilidad para identificar, analizar y solucionar problemas.

Una de las principales características del ABP está en fomentar en el alumno el aprendizaje autodirigido y el pensamiento crítico, además el conocimiento sobre los contenidos en la propia experiencia de trabajo, donde él tiene la posibilidad de analizar en la práctica aplicaciones en torno al problema. Se pretende que el estudiante se involucre en el proceso de aprendizaje propiciando su interés para enfrentarse a problemas contextualizados. El enfoque de ABP permite que bajo el principio de usar problemas centrados en el aprendizaje como punto de partida, el alumno desarrolle competencias tanto de la toma de decisiones como en el momento de proponer estrategias de solución. Para la adquisición y la integración de los nuevos conocimientos[41].

Mediante el ABP el alumno empleará modelos matemáticos que le permitan enfrentarlo a situaciones reales donde la actividad gire en torno a la discusión de un problema y el aprendizaje surja de la experiencia sobre ese problema, para traducirlo en un lenguaje matemático donde después le permitirá modelarlo, simularlo y permita la reflexión sobre su propio aprendizaje. En esta metodología, el docente tiene un rol claramente definido:

Es el facilitador del aprendizaje y su labor es orientar, guiar, moderar y facilitar una adecuada dinámica de grupo, es quien custodia el proceso de aprendizaje del grupo y guía el descubrimiento. Tiene la responsabilidad de buscar, diseñar y plantear problemáticas con un alto grado de significatividad, debe contribuir en el esclarecimiento de las dudas, ayudar a plantear situaciones problema, sugerir y evaluar estrategias de solución así como determinar las etapas y metas de la experiencia asesorando en el diseño de las alternativas de solución del problema[42].

Polya en su libro ¿Cómo plantear y resolver problemas? (1945)[43]. determina una propuesta la cual está enfocada a la forma como se deben asumir y enfrentar los problemas al interior del estudio de la matemática. Sus aportes se encaminan a orientar acerca del manejo de dichas situaciones en los procesos educativos, él comparte, además, la idea de que las estrategias y preguntas de un experto podrían ser modeladas por los docentes en el salón de clase.

Propone un plan, en el cual como primera fase es la comprensión del problema, en esta se ubican las estrategias que ayudan a representar y entender las condiciones iniciales del problema, se formulan preguntas como: ¿Cuál es la condición? ¿Es la condición suficiente para determinar la incógnita? ¿Es insuficiente? ¿Redundante? ¿Contradictoria?, como segunda fase; es la concepción de un plan y en esta se recomienda pensar en problemas conocidos que tengan una estructura

análoga a la que se quiere resolver y así establecer un plan de resolución por medio de estrategias o algoritmos en donde propone formular preguntas: ¿Se conoce algún problema relacionado con éste? ¿Conoces algún teorema que te pueda ser útil? ¿Se puede plantear el problema de otra forma? .En la tercera fase es la ejecución de este plan y en esta se contemplan aspectos que ayudan a monitorear el proceso de solución del problema así como su demostración y la generalización del problema. La última fase es la visión retrospectiva, en donde a idea fundamental de esta fase, es tratar de resolver el problema de una forma diferente y analizar o evaluar la solución obtenida y si este mismo algoritmo se puede aplicar en algún otro problema.

La implementación basada en el método heurístico de Polya ayuda a resolver problemas combinatorios contextualizados.

Esta concepción permite en principio de colocar los problemas unos con relación a otros, a condición de tener una axiomática conveniente de la teoría por enseñar: las discusiones sobre la selección de la mejor axiomática sustentan la mayor parte de las investigaciones sobre los programas[43].

El pensamiento sistémico (PS) ayuda a construir un marco conceptual que permite representar problemas dentro de varios subsistemas o elementos interrelacionados llamados patrones ,la implementación permite el estudio de cualquier fenómeno y sistema enfatizando las relaciones entre las partes del mismo, en lugar de ver el sistema como un todo, este mismo comienza con la articulación del problema ,el análisis del sistema y finaliza con el uso de modelos que permitan la imitación o proceso o sistema del mundo real [44].

El PS es una herramienta dentro de la combinatoria donde para abordar diferentes problemas, estos se pueden contemplar como sistemas, por medio de la identificación de reglas y patrones que permitan llegar a su generalización[45].

VIII. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Problemas:

1)Se quiere elegir a un comité de 3 personas de un total de 20 personas de las cuales una debe ser presidente, el otro secretario y un tesorero ¿De cuantas maneras se puede elegir dicho comité?

Este problema típico de combinatoria donde orden de cada uno de los elementos es fundamental; esto es lo mismo que dar una función $I_3 \{1, 2, 3\}$, pero se tiene que tomar en cuenta que no puede ser cualquier función, ya que la persona no puede ocupar dos cargos a la vez, esto es si se eligió a las personas A, B, C, ocupando los cargos de presidente (1), secretario (2) y tesorero (3)respectivamente; la función correspondiente a esta elección es $f(x) : \{1, 2, 3\} \rightarrow G$, donde G es el conjunto de las 20 personas y $f(1) = A$, $f(2) = B$ y $f(3) = C$ donde $f(1) \neq f(2)$; $f(1) \neq f(3)$ y $f(2) \neq f(3)$, la función debe ser inyectiva.

Definición 1:

Las ordenaciones de n elementos tomados de m en m son las funciones inyectivas $I_3\{1, 2 \dots m\}$ en el conjunto de estos n elementos es O_n^m .

Definición 2:

Las ordenaciones con repetición de n elementos tomados de m en m son las funciones de I_m del conjunto de esos elementos y al número total lo denotaremos OR_n^m .

Proposición 1.2 si A es un conjunto con m elementos y B con un conjunto de n elementos, el número de maneras de escoger un elemento de A y un elemento de B es $m \cdot n$ por el teorema 1.3 sea $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ un conjunto de n elementos, $n \geq 1$, $n(n-1)$ parejas ordenadas de $(a_1, \dots, a_j)$ de elementos A $a_i \neq a_j$.

Demostración:

Sea $i \in I_n$ fija y sea $B_i = A - \{a_i\}$ el número de elementos de B_i es $n-1$

$$\{(a_i, a_i) \in A \times A | a_i \neq a_i\} =$$

$$\bigcup_{i=1}^n (\{a_i\} \times B_1) \cap (\{a_i\} \times B_1) \cap (\{a_j\} \times B_j) = \emptyset \text{ Si } i \neq j$$

$$\begin{aligned} \text{card} \bigcup_{i=1}^n (\{a_i\} \times B_1) &= \sum_{i=1}^n \text{card}(\{a_i\} \times B_1) \\ &= \sum_{i=1}^n (n-1) = (n-1) \end{aligned}$$

Hay $(n-1)$ parejas ordenadas. El número de maneras de escoger la imagen de 1 es n el número de elementos de dar una función inyectiva de I_2 en $A = \{(a, b) \in A \times A | a \neq b\}$, la imagen de 1=a y la imagen e 2=b:

$$f: \{I_2 \rightarrow A | f \text{ es inyectiva}\} \rightarrow A = (a, b) \in A \times A | a \neq b\}$$

Definida $F(f) = (f(1), (f(2)))$ es biyectiva:

$$O_n^2 = n(n-1) = \frac{n!}{(n-2)!}$$

Considerando $f: I_3 \rightarrow A$ determinará:

$$(a_1, a_2, a_3) \in B =$$

$$\{(a_1, a_2, a_3) \in A \times A \times A | a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j \text{ } i=1, 2, 3\}$$

$$\text{Habrá entonces } O_n^3 = O_n^2 (n-2) = n(n-1)(n-2) = \frac{n!}{(n-3)!}$$

Funciones inyectivas $I_3 \rightarrow A$.

$$\therefore O_{20}^2 = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{20!}{2 \cdot 18!} = \frac{20 \cdot 19}{2} =$$

$$10 \cdot 19 = 190 \text{ maneras.}$$

2) a) ¿Cuántos números de seis dígitos, significativos, se pueden escribir en un sistema binario?

b) ¿Cuántos hay que contengan la sucesión 01?

Solución:

El primer dígito siempre es 1, por lo tanto tenemos que ver las formas posibles de formar listas de 5 elementos con los dígitos 0 y 1: el total es $2^5 = 32$

Si queremos ver cuántos de éstos contiene la sucesión 01, esta sucesión puede ocupar una de las siguientes posiciones:

$$1 \ 0 \ 1 \ _ \ _, \ 1 \ _ \ 0 \ 1 \ _ \ _, \ 1 \ _ \ _ \ 0 \ 1 \ _, \ 1 \ _ \ _ \ _ \ 0 \ 1.$$

Cada uno de estos casos tiene tres espacios vacíos, que se pueden rellenar con cualquiera de los dígitos 0 o 1.

Por lo tanto cada uno produce 2^3 números.

Llamamos A_1 a los números del tipo $1 \ 0 \ 1 \ _ \ _ \ _ \$, A_2 a los del tipo $1 \ _ \ 0 \ 1 \ _ \ _ \$, A_3 a los del tipo $1 \ _ \ _ \ 0 \ 1 \ _ \$, y A_4 a los del tipo $1 \ _ \ _ \ _ \ 0 \ 1$.

Tenemos entonces, por el principio de inclusión-exclusión:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| =$$

$$|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_4|.$$

Se tiene:

$$|A_i| = 2^3, \text{ y } |A_1 \cap A_3| = |A_1 \cap A_4| = |A_2 \cap A_4| = 2.$$

Por lo tanto:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 4 \times 2^3 - 3 \times 2 = 32 - 6 = 26.$$

3) ¿Cuántos divisores positivos tiene el número 29338848000, ¿Cuántos son múltiplos de 99? ¿Cuántos son múltiplos de 39?

Si d es un divisor de 29338848000 =

$$2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11 \therefore d =$$

$$2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4} \cdot 11^{\alpha_5} \text{ con:}$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \in A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5 \text{ donde:}$$

$$A_1 = \{0, 1, 2, \dots, 8\}, A_2 = \{0, 1, 2, \dots, 5\}, A_3 = \{0, 1, 2, 3\}, A_4 = \{0, 1, 2, 3\}, A_5 = \{0, 1\}.$$

El número de divisores de 29338848000 es $|A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5| = 9 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2$.

Si $d = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4} \cdot 11^{\alpha_5}$ es múltiplo de $99 \rightarrow \alpha_2 \geq 2; \alpha_5 = 1$.

En total, el número de divisores múltiplo de 99 es:

$$|A_1 \times (A_2 - \{0, 1\}) \times A_3 \times A_4 \times A_5 - \{0\}| =$$

$$9 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1$$

$$39 = 3 \cdot 13 \text{ no es divisor de } 29338848000 \therefore 0$$

4) Un circuito eléctrico posee 10 interruptores. Teniendo en cuenta que cada interruptor tiene dos posiciones $\{1, 0\}$

a) ¿Cuántos estados diferentes puede tener el circuito según la posición de los interruptores?

b) ¿Cuántos estados tienen tres interruptores en posición 1 y el resto en posición 0?

Solución:

a) El circuito puede encontrarse en $VR_{2,10} = 2^{10}$ en estados distintos

b) El número de estados con tres interruptores en posición 1 es en $PR_{10}^{7,3} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120$.

5) Se considera el conjunto $\{1, 2, \dots, 20\}$. ¿De cuántas formas se puede elegir cinco elementos entre los que no haya dos consecutivos?

Solución:

Si hacemos una elección de cinco elementos $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ordenados de menor a mayor, entre los que no hay dos consecutivos, resulta:

$x_5 > x_4 + 1, x_4 > x_3 + 1, x_3 > x_2 + 1, x_2 > x_1 + 1$, y por tanto, el conjunto $\{x_1, x_2 - 1, x_3 - 2, x_4 - 3, x_5 - 4\}$ está formado por cinco elementos distintos. Y recíprocamente, dado un conjunto $\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ de cinco elementos distintos, que podemos suponer ordenados de menor a mayor, resulta que el conjunto $\{y_1, y_2 + 1, y_3 + 2, y_4 + 3, y_5 + 4\}$ de cinco elementos entre los que no hay dos consecutivos; $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ formados por cinco elementos distintos. El valor mínimo de x_1 es 1, y el valor máximo de x_5 es 20, por lo tanto el valor mínimo de y_1 es 1, y el valor máximo de y_5 es $20 - 4 = 16$. El número de conjuntos de cinco elementos es $\binom{16}{5} = 4368$.

6) ¿Cuántos números enteros positivos menores que 120 son primos?

Solución: Los números primos que aportarán números compuestos son: 2, 3, 5 y 7, ya que $11^2 = 121 > 120$. Podemos entonces calcular los números primos menores que 120 que son múltiplos de 2, 3, 5, ó 7; el número de elementos de este conjunto es:

$$|S_2 \cup S_3 \cup S_5 \cup S_7| = (|S_2| + |S_3| + |S_5| + |S_7|) - (|S_2 \cap S_3| + |S_2 \cap S_5| + |S_2 \cap S_7| + |S_3 \cap S_5| + |S_3 \cap S_7| + |S_5 \cap S_7|) + (|S_2 \cap S_3 \cap S_5| + |S_2 \cap S_3 \cap S_7| + |S_2 \cap S_5 \cap S_7| + |S_3 \cap S_5 \cap S_7|) - |S_2 \cap S_3 \cap S_5 \cap S_7|$$

$$= \left(\frac{120-1}{2} + \frac{120-1}{3} + \frac{120-1}{5} + \frac{120-1}{7} \right) - \left(\frac{120-1}{6} + \frac{120-1}{10} + \frac{120-1}{14} + \frac{120-1}{15} + \frac{120-1}{21} + \frac{120-1}{35} \right) + \left(\frac{120-1}{30} + \frac{120-1}{42} + \frac{120-1}{70} + \frac{120-1}{105} \right) - \frac{120-1}{210} = 138 - 53 + 7 - 0 = 92$$

De éstos tenemos que excluir los números 2, 3, 5 y 7, y como el número 1 no es primo, el número de enteros primos positivos menores que 120 es:

$$119 - (92 - 4) - 1 = 30.$$

Podemos comprobar el resultado, ya que los enteros primos pedidos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113.

7) En los lenguajes de programación se utilizan identificadores para hacer referencia a varios objetos: constantes, variables, funciones. Normalmente un identificador está formado por una serie de caracteres, letras del alfabeto ('a', ..., 'z', 'A', ..., 'Z') y dígitos numéricos ('0', ..., '9') empezando siempre por una letra. Por ejemplo, a1, Jet, NUM, n36, AddNode son identificadores válidos, pero 1a, 3jda no se considerarían válidos porque empiezan por un dígito o contienen caracteres que no son letras ni dígitos.

(a) ¿Cuántos identificadores de 8 caracteres podemos formar? ¿Y si todos los caracteres deben ser diferentes?

(b) Si consideramos identificadores con un máximo de 6 caracteres, ¿cuántos identificadores podemos formar con todos los caracteres diferentes?

(c) Si se consideran equivalentes las letras mayúsculas y minúsculas, ¿cuántos identificadores con un máximo de 6 caracteres diferentes podremos formar?

(d) ¿Cuántos de los identificadores del apartado anterior tendrán, al menos, una vocal?

Solución: Suponemos que tenemos 26 letras minúsculas, 26 mayúsculas y 10 dígitos:

(a) El número total de identificadores de 8 caracteres serán: $52 \times VR(62, 7) = 52 \times 62^7 = 183123959522816$

Si todos el caracteres deben ser diferentes, entonces la solución será:

$$52 \times V(61, 7) = 52 \times 61 \times 60 \times 59 \times 58 \times 57 \times 56 \times 55 = 600956640.$$

(b) En este caso, los identificadores pueden tener longitud de 1 a 6. La solución será:

$$52(1 + 52(1 + \sum_{y=1}^5 V(61, y))) = \\ 52(1 + V(61, 1) + V(61, 2) + \\ V(61, 3) + V(61, 4) + V(61, 5)) = \\ 37785374744$$

(c) Este caso es como el anterior pero ahora sólo hace falta considerar 26 letras y 10 dígitos:

$$26(1 + \sum_{y=1}^5 V(35, y)) = \\ 26(1 + V(35, 1) + V(35, 2) + V(35, 3) + V(35, 4) \\ + V(35, 5)) = 1046577376.$$

(d) Calculamos, primero, cuantos identificadores no tienen ninguna vocal:

$$21(1 + \sum_{y=1}^5 V(30, y)) = \\ 21(1 + V(30, 1) + V(30, 2) + V(30, 3) + V(30, 4) \\ + V(30, 5)) = \\ 373457721$$

Sustrayendo de la cantidad del apartado anterior obtendremos el resultado deseado:
 $1046577376 - 373457721 = 673119655$

8) ¿Cuántos números naturales existen menores que 10^6 que no sean capicúas?

Consideramos que un número es capicúa si al invertir el orden de sus cifras obtenemos el mismo número. Los números naturales de una cifra son todo capicúa. No consideramos al 0 como un elemento del conjunto de los números naturales.

Números capicúa de una cifra: $A_1 = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$; $|A_1| = 9$ meros capicúa de dos cifras;

$A_2 = \{11, 22, 33, \dots, 99\}$; $|A_2| = |A_1| = 9$

Números capicúa de tres cifras: $|A_3| = 9 \cdot 10 = 90$

Números capicúa de cuatro cifras: $|A_4| = |A_3| = 90$

Números capicúa de cinco cifras: $|A_5| = 9 \cdot V_{R_{10}, 2} = 9 \cdot 10 = 90$

Números capicúa de seis cifras:

$$|A_6| = |A_5| = 900$$

En total tenemos $\sum_{i=1}^6 |A_i| = 2 \cdot (9 + 90 + 900) = 1998$ números capicúa menores 10^6 , por lo que el número de números naturales que no son capicúa es de : $999,999 - 1,998 = 998,001$.

9) Determina el número de soluciones enteras de la ecuación:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$$

$$a) x_i \geq 0 \quad 1 \leq i \leq 4$$

$$b) x_i > 0 \quad 1 \leq i \leq 4$$

$$c) x_1, x_1 \geq 5; \quad x_1, x_1 \geq 7$$

$$d) x_i \geq 8 \quad 1 \leq i \leq 4$$

$$e) x_i \geq -2 \quad 1 \leq i \leq 4$$

$$f) x_1, x_2, x_3 > 0; \quad 0 < x_4 \leq 25.$$

$$a) \binom{32+4-1}{32} = \frac{35!}{3! \cdot 32!}$$

$$b) \binom{28+4-1}{28} = \frac{31!}{3! \cdot 28!}$$

$$c) \binom{8+4-1}{8} = \frac{11!}{3! \cdot 8!}$$

$$d) \binom{0+4-1}{0} = \frac{3!}{3! \cdot 0!} = 1$$

$$\therefore z_i = x_i + 2 \forall i = 1, 2, 3, 4;$$

Se tiene el sistema:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 40, \\ 0 \leq z_i \forall i = 1 \dots, 4 \end{cases}$$

$$\text{Se tiene un total de } \binom{40+4-1}{40} = \frac{43!}{3! \cdot 40!};$$

$$z_1 = x_1 - 1, z_2 = x_2 - 1, z_3 = x_3 - 1, z_4 = x_4 - 1$$

Se tiene el sistema:

$$R = \begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 28, \\ 0 \leq z_i \forall i = 1 \dots, 4 \wedge z_4 \leq 24 \end{cases}$$

$$|X| = \begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 28, \\ 0 \leq z_i \forall i = 1 \dots, 4 \end{cases}; \binom{31}{28}$$

$$|A| = \begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 28, \\ 0 \leq z_i \forall i = 1 \dots, 3 \wedge 25 \leq z_4 \end{cases} = \binom{6}{3}$$

$$|R| = |X| - |A| = \binom{31}{28} - \binom{6}{3} = 4475.$$

IX. CONCLUSIONES

Los problemas didácticos propuestos en este trabajo, sobre cálculo combinatorio permiten realizar modelos matemáticos a través de axiomas, postulados y teoremas, para llegar a modelar situaciones reales, mediante conceptos preliminares como; variaciones, permutaciones y combinaciones.

El ABP permite fragmentar problemas en subsistemas para poder realizar conjeturas, algoritmos y finalmente proponer estrategias de solución. Sus elementos básicos son el análisis, la lógica, la construcción de patrones y la generalización. Los procesos de enseñanza-aprendizaje deben ser orientados bajo una perspectiva en la que los estudiantes tengan diferentes soluciones que posteriormente demuestren como lo plantea Polya.

Gracias a la teoría de conjuntos se inicia el estudio formal sobre distintas configuraciones de objetos discretos dentro de la combinatoria, así como principios fundamentales para el conteo y el análisis combinatorio, paralelamente la noción de función da sentido a conceptos algebraicos elementales como los de aplicación, relaciones binarias, isomorfismo, coeficientes binomiales, permutaciones y variaciones.

La indagación histórica permite vislumbrar del proceso de transformación que sufrieron los conjuntos discretos, donde a través de las relaciones entre los elementos y sus operaciones, surge el cambio de sus estructuras.

REFERENCIAS

- [1] Riordan, J. *Introduction to combinatorial analysis*. Courier Corporation. (USA, 2012)
 - [2] Bertalanffy, L. V., & Almela, J. *Teoría general de los sistemas: fundamentos, desarrollo, aplicaciones* (No. 001.5). Fondo de Cultura Económica (México, 1976).
 - [3] Johnsonbaugh, R. *Matemáticas discretas*. Pearson Educación. (México, 2005)
 - [4] Ralph P. Grimaldi. *Matemáticas discretas y combinatoria: una introducción con aplicaciones*. Pearson Educación. (México, 1998).
 - [5] Wilhelm, Richard. *I Ching. El libro de las mutaciones*. Traducción de D. J. Vogelmann. Prólogo de Carl Gustav Jung. Barcelona: Edhasa. ISBN 978-84-350-1902-6. (España, 1960)
 - [6] Nam, PB y Miller, D. *Fundamentos de Pa Kua Chang*. Publicaciones únicas. (España, 1998)
- OPCION 2 Too, L. y Hai, YC. *Aplicado Pa-Kua y Lo Shu Feng*

- Shui . North American Ed., Publicaciones orientales. (USA, 1993)
- [7] O'Connor, John J.; Robertson, Edmund F., «Zhu Shijie» (en inglés), *MacTutor History of Mathematics archive*, Universidad de Saint Andrews.
- [8] [10] R. P. Grimaldi, Discrete and combinatorial mathematics, Addison-Wesley, (USA,1989).
- [9] Bhaskara Acharya, II, y Bhaskara Acharya, II. Lilavati Álgebra, con aritmética y medición del sánscrito de Brahmagupta y Bhaskara, traducido por HT Colebrooke (USA,1817).
- OPCION 2 Sarma, K.V. Līlāvātī de Bhāskarācārya con Kriyākramakarī de Śaṅkara y Nārāyaṇa. *Hoshiarpur: Instituto de Investigación Védica Vishveshvaranand* . (USA, 1975)
- [10] Simonson, S. The Mathematics of Levi ben Gershon, the Ralbag. *Dpt. of Math and Comp. Sc., Stonehill College, North Easton, MA*. (USA, 2000)
- [11] Stifel, M.. *Arithmetica integra*. apud Iohan Petreium. (USA,1969)
- [12] Tartaglia, N.. General trattato di numeri, et misure. Vinegia. (USA,1556)
- [13] Cardano, G.. *El libro sobre juegos de azar: (Liber de ludo aleae)* . Holt, Rinehart y Winston. (USA, 1961)
- [14] Vilenkin, N. I.. *De cuantas formas?: Combinatoria*. Mir. (USA,1972).
- [15] Pascal, B.. *Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière*. Chez Gvillavme Desprer. (USA,1978)
- [16] Huygens, C.. *De ratiociniis in ludo aleae*. Ex officina J. Elsevirii. (USA,1980)
- [17] Leibniz, G.. *Dissertatio de Arte Combinatoria*. Berlin: Sämtliche Schriften und Briefe. (Alemania,1666)
- [18] Bernoulli, J. *Ars conjectandi*. Impensis Thurnisiorum, fratrum. (USA,1713)
- [19] De Moivre, A.. *La doctrina de las posibilidades: o, Un método para calcular las probabilidades de eventos en juego* (Vol. 1). Chelsea Publishing Company. (USA,1756)
- [20] Laplace, P. S.. *Théorie analytique des probabilités*. Courcier. (Francia,1820)
- [21] Stewart, I. N.. *Galois theory*. CRC Press. (USA,2015)
- [22] EULER, L. (1736): "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis." *Commentarii Academiæ Scientiarum Imperialis Petropolitane* 8, 128-140. (USA,2015)
- [23] Ramsey, F. P.. On a problem of formal logic. In *Classic Papers in Combinatorics* (pp. 1-24). Birkhäuser Boston. (Alemania, 2009)
- [24] Erdos, " P., Szekeres, G.: "On a Combinatorial Problem in Geometry", *Compositio Math* (USA,1954)
- [25] Kolmogorov A.N.: *Foundations of the theory of probability*, Chelsea, New York. (USA,1956)
- [26] Pólya, G.. Kombinatorische anzahlbestimmungen für gruppen, graphen und chemische verbindungen. *Acta mathematica*, 68, 145-254. (Alemania,1937)
- [27] Flajolet, P., Lam, TY y Lutwak, E.. *Geometrias combinatorias* (Vol. 29). Prensa de la Universidad de Cambridge. (USA,1987)
- [28] Oxley, JG. *Teoría matroide* (Vol. 3). Oxford University Press, Estados Unidos.(USA,2006)
- [29] Fulton, M. W., & Fulton, W. *Young tableaux: with applications to representation theory and geometry* (Vol. 35). Cambridge University Press. (USA,1997).
- [30] Berge, C. Principles of combinatorics. *New York*, 176. (USA,1971).
- [31] Torretti, R.. El paraíso de Cantor. *La tradición conjuntista en filosofía de la matemática*. Santiago de Chile: *Universitaria*. (USA,1998).
- [32] Amor-Montaña, J. A. *Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias*. Las Prensas de Ciencias. (USA, 2009)
- [33] Rey Pastor, J., Calleja, P., Pedro, T., & César, A. Análisis matemático: análisis algebraico: teoría de ecuaciones: cálculo infinitesimal de una variable. (USA,1952).
- [34] Laveaga, C. G. *Álgebra superior: curso completo*. Universidad Nacional Autónoma de México. (México, 2014)
- [35] Ortega, J. M. *Introducción al análisis matemático* (Vol. 5). Servei de Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona. (España, 1993)
- [36] Berman G. & Fryer K. D. Introduction to combinatorics. Academic Press. N. Y. (USA, 1972)
- [37] Brualdi, R. A. *Introductory combinatorics*. Pearson Education India. (USA, 1977)
- [38] MacMahon, P. A. *Combinatory Analysis, Volumes I and II* (Vol. 137). American Mathematical Soc. (USA,2001).
- [39] Lian, B. *Un primer curso de matemática discreta*. Springer Science & Business Media. (USA, 2000)
- [40] Ribnikov, K. *Análisis combinatorio*. Moscú: Mir. (Moscú, 1988).
- [41] Gómez, B. R. Aprendizaje basado en problemas (ABP): una innovación didáctica para la enseñanza universitaria. *Educación y educadores*. (España,2005)
- [42] Sastre, G. *El aprendizaje basado en problemas* (Vol. 235004). Editorial Gedisa. (México, 2018)
- [43] Pólya, G. *Como plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas. (México,1982)
- Gómez, B. R. Aprendizaje basado en problemas (ABP): una innovación didáctica para la enseñanza universitaria. *Educación y educadores*. (México,2005)
- [44] Cavaleri S, Sterman J. Towards evaluation of systems thinking interventions: a case study. *System Dynamics Review* 13(2): pp. 171–186. (USA,1997).
- [45] Checkland, P y Scholes J. Soft systems methodology: a 30-year retrospective. *Systems Research and Behavioral Science Volume: 58*, Publisher: Wiley, pp. 11-58. (USA,1999).

Una alternativa para el trazo de los diez primeros polígonos regulares inscritos en una circunferencia a través de fórmulas deductivas.

Jaime William Flores Tecalco^{#@}

[#]Alumno de la Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.

[@]Alumno de la Universidad Autónoma Metropolitana (UAM)-Azc, Av. San Pablo Xalpa 180 Colonia Reynosa.
william10_511@hotmail.com

Resumen- El presente artículo describe Una alternativa para el trazo de los diez primeros polígonos regulares inscritos en una circunferencia a través de fórmulas deductivas.

Palabras Clave- geometría, formulación, método deductivo, polígonos, algoritmos.

Abstract- This article describes an alternative for the tracing of the first ten regular polygons inscribed on a circle through deductive formula.

Keywords- geometry, formulation, deductive method, polygons, algorithms.

Mathematical Subject Classification: 97D40

I. INTRODUCCIÓN

Se le puede llamar “polígono regular” a la figura geométrica que es equilátera y equiángula al mismo tiempo [1]. Podemos apoyarnos en una circunferencia, circunferencia circunscrita, para el trazado de dichos polígonos. Todo polígono regular tiene una circunferencia inscrita y una circunscrita [3].

La construcción del polígono regular consiste en la división de la circunferencia en un número de partes iguales dependiendo el polígono a tratar e unirlos al finalizar.

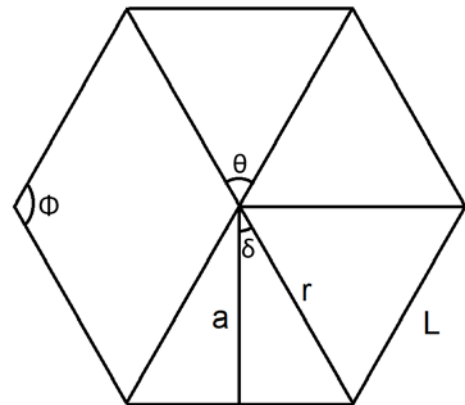
Para conseguir estas partes iguales, por lo regular se lleva a cabo una metodología de relaciones y trazos diferentes en cada figura geométrica ocupando compás, regla y escuadra. Por ende, cada polígono regular posee un algoritmo particular de trazado.

Desde la educación básica en nuestro país, los planes de estudio contemplan el estudio de polígonos regulares, su trazado, el cálculo de su perímetro y área; así que el propósito de este escrito es dar una alternativa a la metodología que usualmente se usa, con esto no se quiere dar a entender que el uso de fórmulas deductivas sea bueno o malo, simplemente son una opción adicional. También cabe mencionar que estas fórmulas no son nuevas sino son una derivación de relaciones geométricas de cada polígono regular.

II. PARTES DE UN POLÍGONO REGULAR

Para comenzar vamos a recapitular el conocimiento obtenido en nuestra formación escolar denotando las partes, solo las de nuestro interés en este texto, de un polígono regular.

Se tomará la figura 1 como el del hexágono regular para generalizar los conceptos.



Hexágono Regular

Fig. 10 Hexágono regular.

Primero denotaremos como **L** al lado del polígono regular y como **r** al radio, el cual es el segmento que une el centro del polígono con uno de sus vértices. El centro de una circunferencia circunscrita es el mismo que la del polígono regular inscrito en ella [6]. Denominaremos como **a** la apotema, que es el segmento perpendicular del centro del polígono a uno de sus lados [1]. Si el número de lados de un polígono regular inscrito se aumenta indefinidamente, la apotema tiende hacia el radio como límite [3].

Un ángulo central tiene el mismo número de grados que el arco que lo intercepta, es decir, se mide por su arco interceptado [5]. El ángulo central se denotará por θ (Theta), entonces:

$$\theta = \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{n} \quad (1)$$

Donde n será el número de lados del polígono regular a tratar.

Le llamaremos ángulo δ (Delta) a uno de los ángulos del triángulo rectángulo formado por **a** y **r**, por lo cual:

$$\delta = \frac{\theta}{2} = \frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n} = \frac{\pi}{n}$$

$$\delta = \frac{\pi}{n} \quad (2)$$

Al ángulo interno se le llamará Φ (Phi), se ocupará la siguiente expresión para representarlo:

$$\phi = \frac{(n-2)}{n} 180^\circ \quad (3)$$

La expresión (3) proviene de la generalidad de la suma de ángulos internos:

Si se sabe que la suma de los ángulos internos (α) de un triángulo es 180° [6], entonces se puede escribir de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 180^\circ \quad (4)$$

Para saber la suma de los ángulos internos (β) de un cuadrado se puede dividir el cuadrado en dos triángulos y la suma la expresamos como:

$$\sum_{i=1}^4 \beta_i = 2 \sum_{i=1}^3 \alpha_i = 2(180^\circ) = 360^\circ \quad (5)$$

Así mismo se puede saber la suma de los ángulos internos (γ) de un pentágono al dividir en tres triángulos y su suma expresarla como:

$$\sum_{i=1}^5 \gamma_i = 3 \sum_{i=1}^3 \alpha_i = 3(180^\circ) = 540^\circ \quad (6)$$

De la misma manera se puede expresar la suma de los ángulos internos (Φ) de los siguientes polígonos de n lados en función de triángulos. Notamos que el escalar por el que se multiplica (4) es siempre menor en dos al número de lados del polígono, así que se expresará de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^n \phi_i = (n-2) \sum_{i=1}^3 \alpha_i = (n-2) 180^\circ$$

$$\sum_{i=1}^n \phi_i = (n-2) 180^\circ \quad (7)$$

Llamándole a (7) como la generalidad de la sumatoria de los ángulos internos de un polígono de n lados, es obvio que al ser dividida la expresión (7) entre el número de lados (n) de un polígono se obtendrá el valor del ángulo interno (Φ). Entonces tenemos:

$$\frac{\sum_{i=1}^n \phi_i}{n} = \frac{(n-2)}{n} 180^\circ = \phi$$

$$\phi = \frac{(n-2)}{n} 180^\circ \quad (3)$$

III. FÓRMULAS DEDUCTIVAS

A) TRIÁNGULO

Al analizar la construcción de un triángulo equilátero se puede observar en la figura 2 que cuando se traza la altura en dos vértices se obtiene la formación de un triángulo rectángulo. Así que al ocupar este triángulo rectángulo se puede obtener una igualdad que relacione el lado del triángulo equilátero (L_3) y el radio (r) de la circunferencia circunscrita.

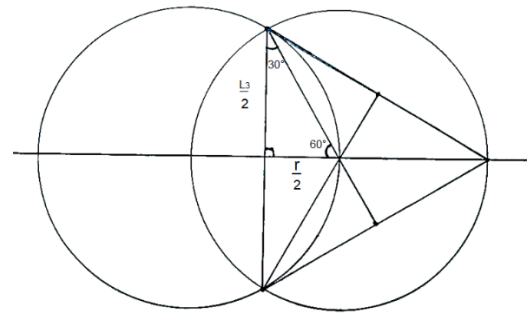


Fig. 2. Triángulo

La fórmula deductiva se puede obtener de dos maneras:
Primera forma:

Debido a la propiedad de rigidez, el triángulo es el único polígono que ha desarrollado una ciencia especial llamada trigonometría, la cual estudia las medidas de los triángulos [2], por dicha razón la primera forma de relacionar L_3 y r es ocupar la función trigonométrica $\tan \frac{\phi}{2}$.

Si denotamos $\tan \frac{\phi}{2} = 30^\circ$, entonces:

$$\tan 30^\circ = \frac{\frac{r}{2}}{\frac{L_3}{2}}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{2r}{2L_3} = \frac{r}{L_3}$$

$$r = L_3 \tan 30^\circ$$

Por lo tanto, la fórmula deductiva del triángulo equilátero en función de r es:

$$r = \frac{L_3 \sqrt{3}}{3} \quad (8)$$

Y en función de L_3 es:

$$L_3 = \sqrt{3}r \quad (8.1)$$

Segunda forma:

La relación de L_3 y r también se puede obtener ocupando el Teorema de Pitágoras.

$$(r)^2 = \left(\frac{L_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

$$r^2 = \frac{L_3^2}{4} + \frac{r^2}{4}$$

$$r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{L_3^2}{4} + \frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{4}$$

$$\frac{3r^2}{4} = \frac{L_3^2}{4}$$

$$3r^2 = L_3^2$$

$$r = \sqrt{\frac{L_3^2}{3}} = \frac{\sqrt{L_3^2}}{\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{L_3}{\sqrt{3}} \cdot (1)$$

$$r = \frac{L_3}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$r = \frac{L_3\sqrt{3}}{3} \quad (8)$$

B) CUADRADO

En el cuadrado, la relación de L_4 y r se puede obtener al ocupar el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo formado por las diagonales de dicho cuadrado, como se muestra en la figura 3.

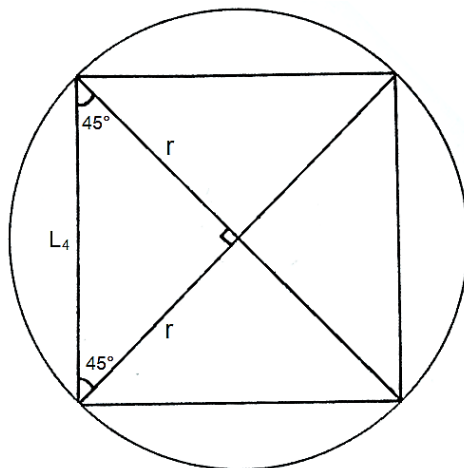


Fig. 3. Cuadrado

Se sabe que la base y la altura del triángulo rectángulo es r y su hipotenusa es L_4 , entonces:

$$L_4^2 = r^2 + r^2$$

$$L_4^2 = 2r^2$$

$$r^2 = \frac{L_4^2}{2}$$

$$r = \sqrt{\frac{L_4^2}{2}}$$

$$r = \frac{L_4}{\sqrt{2}}$$

Por lo tanto, reduciendo, la fórmula deductiva del cuadrado en función de r es:

$$r = \frac{L_4\sqrt{2}}{2} \quad (9)$$

Y en función a L_4 es:

$$L_4 = \sqrt{2}r \quad (9.1)$$

Por otro lado, si se ocupa la función trigonométrica $\sin \varphi$ también se llega a la expresión (9).

$$\sin \varphi = \sin 45^\circ = \frac{r}{L_4}$$

$$r = L_4 \sin 45^\circ$$

$$r = \frac{L_4\sqrt{2}}{2} \quad (9)$$

C) PENTÁGONO

Teniendo la construcción del pentágono regular se puede trabajar con el triángulo isósceles formado por el centro y dos vértices contiguos, dicho triángulo isósceles se divide para formar dos triángulos rectángulos iguales, al enfocarse en uno de éstos triángulos se puede obtener una relación, entre el lado (L_5) del pentágono y el radio (r) de la circunferencia que lo contiene, al ocupar la función trigonométrica $\sin \delta$, como se muestra en la figura 4.

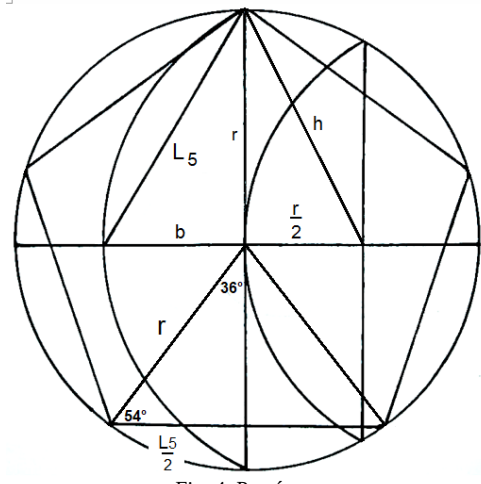


Fig. 4. Pentágono

Si se denota $\delta = 36^\circ$, entonces:

$$\sin 36^\circ = \frac{L_5}{2r}$$

$$\sin 36^\circ = \frac{L_5}{2r}$$

$$2r = \frac{L_5}{\sin 36^\circ}$$

Por lo tanto reduciendo, la fórmula deductiva en función a r del pentágono es:

$$r = \frac{L_5}{2 \sin 36^\circ} \quad (10)$$

Y en función de L_5 es:

$$L_5 = 2 \sin(36^\circ) r \quad (10.1)$$

Además de esta fórmula se puede obtener otra expresión sin ocupar la función trigonométrica $\sin$. Para ello se ocupa el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo que tiene como hipotenusa L_5 y como cateto mayor r . Por ello se averigua primero el valor de h para obtener b . Para obtener h se ocupa el Teorema de Pitágoras:

$$h^2 = r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

$$h = \sqrt{r^2 + \frac{r^2}{4}}$$

$$h = \frac{\sqrt{5}r}{2}$$

Se obtiene **b** ahora:

$$b = \frac{\sqrt{5}r}{2} - \frac{r}{2}$$

Con **b** ya se puede obtener la relación buscada:

$$\begin{aligned}(L_5)^2 &= (r)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}r}{2} - \frac{r}{2}\right)^2 \\(L_5)^2 &= \frac{(5 - \sqrt{5})r^2}{2} \\L_5 &= \sqrt{\frac{(5 - \sqrt{5})r^2}{2}}\end{aligned}$$

Reduciendo se obtiene otra fórmula deductiva en función a **L₅** del pentágono:

$$L_5 = r \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} \quad (10.2)$$

Y en función a **r** es:

$$r = \frac{L_5(5\sqrt{2(5 - \sqrt{5})} + \sqrt{10(5 - \sqrt{5})})}{20} \quad (10.3)$$

Como se puede observar (10.3) es más laboriosa por ende se puede ocupar como mejor opción (10) generando el mismo resultado.

D) HEXÁGONO

En el hexágono, la fórmula deductiva se puede obtener al analizar la construcción mostrada; ocupando el triángulo rectángulo y la función trigonométrica $\sin \frac{\varphi}{3}$, como se describe en la figura 5.

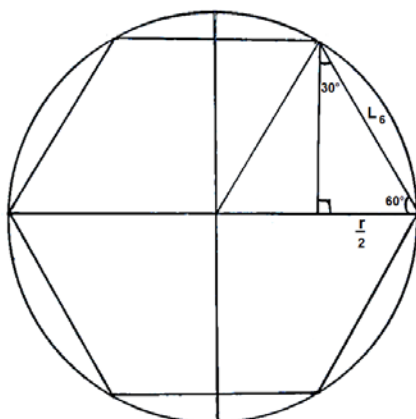


Fig. 5. Hexágono

Si se denota $\sin \frac{\varphi}{3} = 30^\circ$, entonces:

$$\begin{aligned}\sin 30^\circ &= \frac{r}{L_6} \\ \sin 30^\circ &= \frac{r}{2L_6} \\ r &= 2L_6 \sin 30^\circ \\ r &= 2L_6 \left(\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

Por lo tanto reduciendo, la fórmula deductiva en función de **r** del hexágono es:

$$r = L_6 \quad (11)$$

Y en función de **L₆**:

$$L_6 = r$$

También se obtiene la fórmula deductiva (11) cuando el hexágono se divide en 6 triángulos equiláteros y se observa que **r** es un lado de ese triángulo y **L₆** también.

E) HEPTÁGONO

Si se trabaja en el triángulo rectángulo formado en la construcción del heptágono regular, se puede obtener la relación entre **L₇** y **r** que buscamos, descrita en la figura 6.

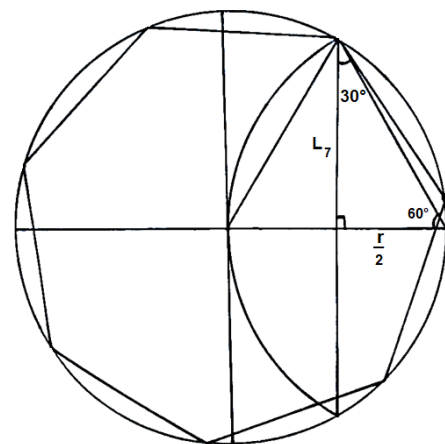


Fig. 6. Heptágono

Al ser ocupada la función trigonométrica tan, donde la altura del triángulo rectángulo es **L₇** tenemos:

$$\begin{aligned}\tan 30^\circ &= \frac{r}{L_7} \\ \tan 30^\circ &= \frac{r}{2L_7} \\ r &= L_7 2 \tan 30^\circ\end{aligned}$$

Por lo tanto reduciendo, la fórmula deductiva en función de **r** del heptágono es:

$$r = \frac{L_7 2\sqrt{3}}{3} \quad (12)$$

Y en función de **L₇** es:

$$L_7 = \frac{\sqrt{3}r}{2} \quad (12.1)$$

F) OCTÁGONO

En la circunferencia que contiene a un cuadrado, se puede notar que al dividir los lados del cuadrado a la mitad y trazar una línea, que pase por ellos y toque la circunferencia y el centro, obtenemos 8 triángulos rectángulos como en la figura 7; al trabajar con alguno de ellos podemos obtener la relación entre L_8 y r con el Teorema de Pitágoras.

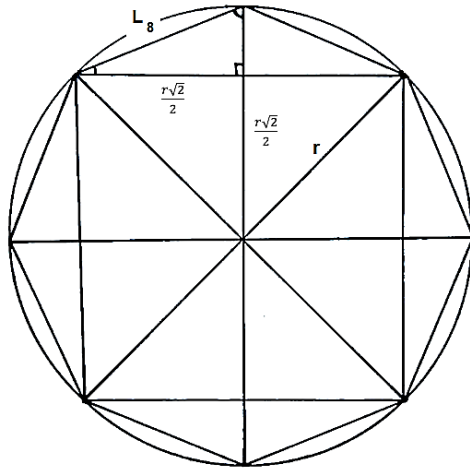


Fig. 7. Octágono

Entonces:

La fórmula deductiva del cuadrado es:

$$r = \frac{L_4\sqrt{2}}{2} \quad (9)$$

Al escribirla en función de L_4 (9.1) y dividirla entre dos obtenemos:

$$\frac{L_4}{2} = \frac{\sqrt{2}r}{2} \quad (13)$$

Lo que representa la base del triángulo rectángulo a manejar, para hallar su altura de dicho triángulo simplemente se le resta (13) a r .

Al ocupar el Teorema de Pitágoras se tiene:

$$\begin{aligned} (L_8)^2 &= \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(r - \frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ (L_8)^2 &= \frac{r^2}{2} + r^2 - \sqrt{2}r^2 + \frac{r^2}{2} \\ (L_8)^2 &= 2r^2 - \sqrt{2}r^2 \\ L_8 &= \sqrt{2r^2 - \sqrt{2}r^2} \\ L_8 &= \sqrt{r^2} \sqrt{2 - \sqrt{2}} \\ L_8 &= r \sqrt{2 - \sqrt{2}} \end{aligned}$$

Escribiendo la fórmula deductiva del octágono, en función de r , tenemos:

$$r = \frac{L_8}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} \quad (14)$$

Y en función de L_8 es:

$$L_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}} r \quad (14.1)$$

G) ENEÁGONO

Para obtener la fórmula deductiva del eneágono se puede analizar el triángulo rectángulo que se forma al dividir el triángulo isósceles formado por dos vértices consecutivos y el centro del polígono, descrito en la figura 8.

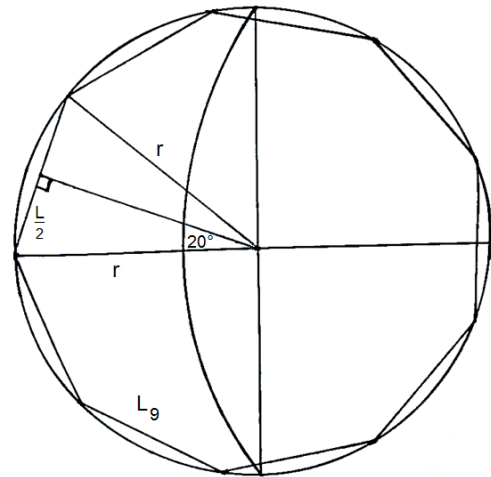


Fig. 8. Eneágono

Se puede ocupar la función trigonométrica $\sin \delta$. Si se denota $\delta = 20^\circ$ entonces:

$$\begin{aligned} \sin 20^\circ &= \frac{\frac{L_9}{2}}{r} \\ \sin 20^\circ &= \frac{L_9}{2r} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la fórmula deductiva del eneágono en función de r es:

$$r = \frac{L_9}{2 \sin 20^\circ} \quad (15)$$

Y en función de L_9 es:

$$L_9 = 2 \sin 20^\circ r \quad (15.1)$$

H) DECÁGONO

Al analizar la construcción del decágono regular de la figura 9 se nota la formación de un triángulo rectángulo de hipotenusa de tamaño L_5 (se puede ver en la sección del pentágono), de cateto mayor r y cateto menor L_{10} . En este triángulo se puede obtener la relación deseada. Ocupando el Teorema de Pitágoras tenemos:

$$L_5^2 = r^2 + L_{10}^2$$

Donde L_5 es la fórmula (10.2), por lo tanto:

$$\left(r \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}\right)^2 = r^2 + L_{10}^2$$

$$\begin{aligned}\frac{(5 - \sqrt{5})r^2}{2} - r^2 &= L_{10}^2 \\ \frac{5 - \sqrt{5}}{2} r^2 - r^2 &= L_{10}^2 \\ r^2 \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2} - 1 \right) &= L_{10}^2 \\ r^2 \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) &= L_{10}^2 \\ L_{10} &= \sqrt{\frac{(3 - \sqrt{5})r^2}{2}}\end{aligned}$$

Reduciendo se obtiene la fórmula deductiva del decágono en función de L_{10} :

$$L_{10} = \frac{r \sqrt{2(3 - \sqrt{5})}}{2} \quad (16)$$

Escribiendo en función de r tenemos:

$$r = \frac{L_{10}(3 + \sqrt{5})^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} \quad (16.1)$$

Se puede obtener otra fórmula deductiva del decágono al trabajar con el triángulo isósceles formado por el centro y dos vértices contiguos, dicho triángulo isósceles se divide para formar dos triángulos rectángulos iguales, al enfocarse en uno de estos triángulos se puede obtener una relación, entre el lado (L_{10}) del decágono y el radio (r) de la circunferencia que lo contiene, al ocupar la función trigonométrica $\sin \delta$.

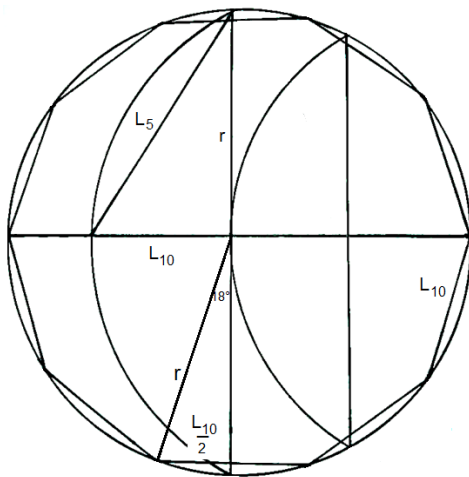


fig. 9. Decágono.

Si se denota $\delta = 18^\circ$, entonces:

$$\begin{aligned}\sin 18^\circ &= \frac{L_{10}}{2r} \\ \sin 18^\circ &= \frac{L_{10}}{2r}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la fórmula deductiva del decágono en función de L_{10} es:

$$L_{10} = 2 \sin 18^\circ r \quad (16.2)$$

Y en función de r es:

$$r = \frac{L_{10}}{2 \sin 18^\circ} \quad (16.3)$$

I) ENDECÁGONO

Para obtener la fórmula deductiva del endecágono se puede ocupar la función trigonométrica $\sin \delta$ en el triángulo rectángulo formado en la construcción de la figura 10.

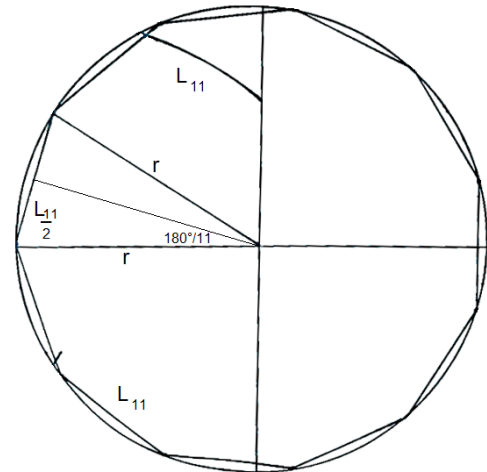


Fig. 10 endecágono

Si se denota $\sin \delta = \frac{180^\circ}{11}$, entonces:

$$\sin \frac{180^\circ}{11} = \frac{L_{11}}{2r}$$

Reduciendo se obtiene la fórmula deductiva del endecágono en función de r :

$$r = \frac{L_{11}}{2 \sin \frac{180^\circ}{11}} \quad (17)$$

Escribiendo en función de L_{10} tenemos:

$$L_{11} = 2 \sin \frac{180^\circ}{11} r \quad (17.1)$$

J) DODECÁGONO

Se puede obtener dos fórmulas deductivas para el dodecágono, como en la figura 11.

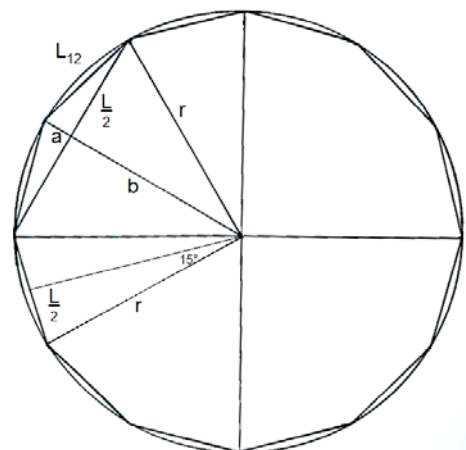


Fig. 11 Dodecágono

La primera de ellas se trabaja en el triángulo rectángulo que se forma al dividir el triángulo isósceles formado por dos vértices consecutivos y el centro del polígono. Se puede ocupar la función trigonométrica $\sin \delta$. Si se denota $\delta = 15^\circ$ entonces:

$$\sin 15^\circ = \frac{\frac{L_{12}}{2}}{r}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{L_{12}}{2r}$$

Por lo tanto, la fórmula deductiva del dodecágono en función a L_{12} es:

$$L_{12} = 2r \sin 15^\circ \quad (18)$$

Y en función de r :

$$r = \frac{L_{12}}{2 \sin 15^\circ} \quad (18.1)$$

La segunda fórmula deductiva se obtiene de una forma más elaborada, se ocupa el Teorema de Pitágoras en triángulo rectángulo formado por hipotenusa L_{12} , cateto mayor $r/2$ y cateto menor a . Para obtener el valor de a se debe obtener primero el valor de b en el triángulo rectángulo contiguo.

Se calcula b con el Teorema de Pitágoras:

$$b = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2}$$

$$b = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}$$

Teniendo este valor se sabe el valor de a .

$$a = r - \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}$$

Se obtiene la relación buscada ocupando de nuevo el Teorema de Pitágoras en el triángulo escaleno donde a es el cateto menor. Entonces:

$$L_{12}^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + (a)^2$$

$$L_{12}^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}\right)^2$$

$$L_{12} = \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}}\right)^2}$$

$$L_{12} = \sqrt{\frac{r^2}{4} + \left(r - \frac{\sqrt{3}r}{2}\right)^2}$$

$$L_{12} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})r^2}$$

$$L_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} \sqrt{r^2}$$

Por lo tanto, la otra fórmula deductiva del dodecágono en función a L_{12} es:

$$L_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} r \quad (18.3)$$

Y en función de r :

$$r = L_{12} \sqrt{\sqrt{3} + 2} \quad (18.4)$$

IV. ¿CÓMO OCUPAR LAS FÓRMULAS DEDUCTIVAS?

Para el trazo de los diez primeros polígonos regulares manejaremos de la misma manera las fórmulas deductivas presentadas. Dichas fórmulas poseen la característica de relacionar únicamente el tamaño del lado (L) del polígono con el tamaño del radio (r) de la circunferencia circunscrita. Por tal motivo, podemos tener tres casos:

Caso 1: Si conocemos el tamaño del radio (r) de la circunferencia circunscrita entonces sustituiremos dicho valor en la fórmula para obtener el tamaño del lado (L) del polígono buscado. Con el compás, abierto al tamaño del lado (L), dividiremos la circunferencia de radio (r) tantas veces como sea posible. Uniremos las marcas de las divisiones de la circunferencia y obtendremos dicho polígono.

Caso 2: Si conocemos el tamaño del lado (L) del polígono buscado entonces sustituiremos dicho valor en la fórmula para obtener el radio (r) de la circunferencia circunscrita. Con el compás, abierto al tamaño del radio (r), trazaremos la circunferencia; después de nuevo con el compás, abierto al tamaño del lado (L), dividiremos la circunferencia de radio (r) tantas veces como sea posible. Uniremos las marcas de las divisiones de la circunferencia y obtendremos dicho polígono.

Caso 3: Si no conocemos el tamaño del radio (r) de la circunferencia circunscrita ni el tamaño del lado (L) del polígono buscado entonces simplemente designaremos un valor (de acuerdo con nuestra conveniencia) para (r) o (L) y lo sustituiremos en la fórmula deductiva.

Después se realizará las mismas instrucciones de trazo del Caso 1 o Caso 2.

V. CONCLUSIONES

El problema de la construcción de los polígonos regulares tiene relación con el problema de la división de la circunferencia en partes iguales; y se puede circunscribir a la circunferencia tantos polígonos regulares como se puede inscribir [4].

Las fórmulas deductivas son una ayuda para el trazo de los polígonos regulares en una circunferencia circunscrita.

En estas líneas se expresan varias de ellas y en algunos casos más de una para el mismo polígono.

En el método tradicional de trazo, por una secuencia de pasos, no todos los polígonos dibujados son exactos; lo mismo ocurre para algunas fórmulas deductivas al ocupar las herramienta (compás y regla) y ejecutar su dinámica.

Cabe señalar que estas fórmulas son una alternativa para la persona y sus necesidades al momento de trazar un polígono regular.

REFERENCIAS

- [1] Barnett Rich, P: *Plane Geometry*. McGraw-Hill. (N.Y., 1967).
- [2] Cuevas, J. N.: *Trigonometría* Vol. 9. LIMUSA (México, 1980)
- [3] Wentworth, J. / Smith D.. *Geometry*. Ginn and Company. (Boston, 1972)
- [4] Bruño, G. M.. *Elementos de Geometría*. Bouret. Rue Visconti, (París, 1909).
- [5] Barnett, R., Thomas, C. *Geometry*. Schaum's.. McGraw-Hill. (N.Y., 2017)

Journal de *Objetos y* *Objetivos* *Matemáticos*